Қ. И. Сатбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университетінің 6В06103 – Математикалық және компьютерлік модельдеу мамандығының 4-курс студенттері Қамысбай Балауса Мұхтарқызы және Шәріпхан Маржан Мәуленқызының "Біртекті емес тұрақты және айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешудегі Хевисайдтың операторлық әдісі" тақырыбына жазылған дипломдық жобасына

САРАПТАМА - ПІКІР

Дипломдық жоба біртекті емес тұрақты және айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешудегі Хевисайдтың операторлық әдісін қолдануға арналған. Біртекті емес ортадағы көптеген үрдістер айнымалы коэффициентті қарапайым дифференциалдық теңдеулер арқылы сипатталады. Теңдеудің құрамына кіретін коэффициенттерге байланысты олардың аналитикалық шешімдері болуы да мүмкін. Кейбір мұндай теңдеулердің арнайы функциялар арқылы өрнектелетін шешімдері болады. Дербес жағдайда біртекті екінші ретті айнымалы коэффициентті сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеулердің шешімдері классикалық ортогональды көпмүшеліктер болады. Көптеген жағдайда айнымалы коэффициентті теңдеулердің шешімдерін табу үшін сандық немесе әртүрлі жуық әдістер мен тәсілдерге жүгінеді. Бұл тәсілдер теңдеулер мен жүйелерді шешу процесін жеңілдетуге, сондай-ақ оны тиімдірек етуге мүмкіндік береді.

Дипломдық жоба анық және құрылымдалған түрде ұсынылған, бұл оны оңай оқуға және түсінуге мүмкіндік береді. Жұмыста теңдеулерді шешудің қолданыстағы әдістерін, сондай-ақ жаңа нәтижелер мен ұсыныстарға кең талдау бар. Жұмыстың көп бөлігі тәжірибеде дәлірек және толық шешімдер алуға мүмкіндік береді. Біртекті емес тұрақты және айнымалы коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулерді шешуді зерттеуге ерекше назар аударылған.

Тұтастай алғанда, "Біртекті емес тұрақты және айнымалы коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешудегі Хевисайд операторлық әдісі" дипломдық жобасы математика ғылымының дамуына ықпал ететін қызықты және құнды зерттеу болып табылады. Бұл тақырыпты зерттеу бойынша үлкен жұмыс жасалды және өз нәтижесі түсінікті және сауатты түрде ұсынылды.

Жоба логикалық дәйекті және анық түрде жазылған. Орындалған жұмыс қойылған талапқа толық жауап береді және толық зерттеу болып табылады. Жобаның негізділігі мен сенімділігі зерттеулердің толықтығын көрсетеді.

Осылайша дипломдық оба өзекті, маңызды теориялық және практикалық құндылығымен ерекшеленеді. Сол себепті жобаны 95% пайызға лайық деп бағалауға болады

Физика-математика ғылымдарының кандидаты, Ғ. Даукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті " Ғарыштық инженерия" кафедрасының профессоры

Қырықбаев Батырхан

Қолтаңбаны растаймын
Подпись заверяю

қызметі   аты-жөні

«29» 05 2024 ж.

Персоналды басқару жөніндегі бөлім
Отдел по управлению персоналом

Қ. И. Сатбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университетінің 6В06103 – Математикалық және компьютерлік модельдеу мамандығының 4-курс студенттері Қамысбай Балауса Мұхтарқызы және Шәріпхан Маржан Мәуленқызының "Біртекті емес тұрақты және айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешудегі Хевисайдтың операторлық әдісі" тақырыбына жазылған дипломдық жобасына

ПІКІР

Жобада тұрақты және айнымалы коэффициенттері бар біртекті емес дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешуде Хевисайд операторының әдісін қолданылған және терең зерттелінген. Бұл әдістің негізгі қасиеттері мен теоремалары математикалық физика мен техниканың күрделі есептерін шығаруда және талдауда тиімділігін көрсетті. Жобаның орындалу барысында Хевисайд операторы әдісін қолдануға байланысты барлық нәтижелер мен тәсілдер жүйеленіп, талданған. Біртекті емес теңдеулерді шешу кезінде операторлық тәсілдің мәнін және оның артықшылықтарын түсінуге ерекше көңіл бөлінген. Бұл әдістің өзектілігі мен маңыздылығын, әсіресе жаратылыстану ғылымдары мен техниканың әртүрлі салаларындағы қолданулар негіздейді. Тұрақтыларды вариациялау әдісі сияқты дифференциалдық теңдеулерді шешудің басқа әдістерімен салыстырғанда Хевисайд операторы әдісінің артықшылықтары көрсетілген.

Жалпы, бұл жоба дифференциалдық теңдеулер теориясы мен математикалық физикаға құнды үлес болып табылады. Жоба өзінің терең талдауымен, анық құрылымымен және практикалық қолдану мүмкіндігімен назар аударады. Математиканың осы саласына және оның қолданбаларына қызығушылық танытатын кез келген адамға оқуға ұсынылады.

Дипломдық жобалау кезінде Балауса мен Маржан жақсы теориялық білімдерін көрсетіп, дипломдық жобаның бөлімдерінің негізгі сұрақтарын толық орындап, арнайы әдебиеттер мен нормативті-анықтамалық құжаттарды қолдана білді. Сондықтан Қамысбай Балауса мен Шәріпхан Маржанның дипломдық жобасын 95% пайызға бағалауға болады.

Ғылыми жетекші:
Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ-нің
«Жоғарғы математика және модельдеу»
кафедрасының қауымдастырылған
профессоры Сағындықов Б. Ж.

Университеттің жүйе администраторы мен Академиялық мәселелер департаменті директорының ұқсастық есебіне талдау хаттамасы

Жүйе администраторы мен Академиялық мәселелер департаментінің директоры көрсетілген еңбекке қатысты дайындалған Плагиаттың алдын алу және анықтау жүйесінің толық ұқсастық есебімен танысқанын мәлімдейді:

Автор: Қамысбай Балауса Мұхтарқызы, Шәріпкан Маржан Мәуленқызы

Тақырыбы: Дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешудегі Хевисайдтың операторлық әдісі

Жетекшісі: Бимұрат Сағындықов

1-ұқсастық коэффициенті (30): 1.8

2-ұқсастық коэффициенті (5): 1.5

Дәйексөз (35): 0.2

Әріптерді ауыстыру: 0

Аралықтар: 0

Шағын кеңістіктер: 0

Ақ белгілер: 32

Ұқсастық есебін талдай отырып, Жүйе администраторы мен Академиялық мәселелер департаментінің директоры келесі шешімдерді мәлімдейді :

☒ Ғылыми еңбекте табылған ұқсастықтар плагиат болып есептелмейді. Осыған байланысты жұмыс өз бетінше жазылған болып санала отырып, қорғауға жіберіледі.

☐ Осы жұмыстағы ұқсастықтар плагиат болып есептелмейді, бірақ олардың шамадан тыс көптігі еңбектің құндылығына және автордың ғылыми жұмысты өзі жазғанына қатысты күмән тудырады. Осыған байланысты ұқсастықтарды шектеу мақсатында жұмыс қайта өңдеуге жіберілсін.

☐ Еңбекте анықталған ұқсастықтар жосықсыз және плагиаттың белгілері болып саналады немесе мәтіндері қасақана бұрмаланып плагиат белгілері жасырылған. Осыған байланысты жұмыс қорғауға жіберілмейді.

Негіздеме:

Күні *Кафедра меңгерушісі*

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Қ.И.Сәтбаев атындағы қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті» комерциялық емес акционерлік қоғамы

Автоматтандыру және ақпараттық технологиялар институты

Жоғары математика және модельдеу кафедрасы

Дипломдық жобаға
ТҮСІНДІРМЕ ЖАЗБА

Біртекті емес тұрақты және айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешудегі Хевисайдтың операторлық әдісі

6В06103 – Математика және компьютерлік модельдеу

Орындаған Қамысбай Б.М.,
Шәріпкан М.М.,

Алматы 2024

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Қ.И.Сәтбаев атындағы қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті» комерциялық емес акционерлік қоғамы

Автоматтандыру және ақпараттық технологиялар институты

Жоғары математика және модельдеу кафедрасы

ҚОРҒАУҒА ЖІБЕРІЛДІ
«Жоғары Математика және Модельдеу» кафедрасының меңгерушісі физика - математика ғылымдарының кандидаты, кауымдастырылған профессор Тулешова Г.А.
____
«03» 06 2024 ж.

Дипломдық жобаға
ТҮСІНДІРМЕ ЖАЗБА

Біртекті емес тұрақты және айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешудегі Хевисайдтың операторлық әдісі

6B06103 – Математика және компьютерлік модельдеу

Орындаған Қамысбай Б.М.
Шәріпкан М.М.

Рецензент
Физика-математика ғылымдарының кандидаты, Ғ.Даукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс Университеті «Ғарыштық инженерия» кафедрасының профессор
Б.Ж Қырықбаев
«29» 05 2024 ж.

Ғылыми жетекші
Физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, қауымдастырылған профессор
Б.Ж Сагындыков
«28» 05 2024 ж.

Алматы 2024

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Қ.И.Сәтбаев атындағы қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті» комерциялық емес акционерлік қоғамы

Автоматтандыру және ақпараттық технологиялар институты

Жоғары математика және модельдеу кафедрасы

6B06103 – Математика және компьютерлік модельдеу

БЕКІТЕМІН
«Жоғары Математика және Модельдеу» кафедрасының меңгерушісі физика-математика ғылымдарының кандидаты, кауымдастырылған профессор Тулешова Г.А.
____
«03» 06 2024 ж.

Дипломдық жобаны орындауға арналған
ТАПСЫРМА

Білім алушылар Қамысбай Балауса Мұхтарқызы, Шәріпкан Маржан Мәуленқызы
Тақырыбы: Біртекті емес тұрақты және айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешудегі Хевисайдтың операторлық әдісі
Университет Ректорының 2024 жылғы «4» желтоқсандағы № 548-П/Ө бұйрығымен бекітілген.
Орындалған жұмыстың өткізу мерзімі «06» 06 2024 ж.
Дипломдық жұмыстың бастапқы мәліметтері: теориялық материалдарды жинау, қосымшаларды әзірлеу.
Дипломдық жұмыста қарастырылатын мәселелер тізімі:
а) Дифференциалдық теңдеу мен теңдеулер жүйесі
б) Дифференциалдық теңдеулерді шешудің операторлық Хевисайд әдісі
Ұсынылған негізгі әдебиеттер саны: 4

Дипломдық жобаны дайындау

КЕСТЕСІ

Бөлімдер атауы, зерттеп дайындалатын мәселелер тізімі	Ғылыми жетекшіге ұсыну мерзімдері	Ескерту
Дипломдық жобаның жоспарын құру	22.12.2023	орындалды
Негізгі бөлімді қарастыру	11.01.2024	орындалды
Ғылыми зерттеулер жасау	23.02.2024	орындалды
Практикалық бөлімін қарастыру	18.03.2024	орындалды
Дипломдық жобаны қорытындылау	01.04.2024	орындалды

Қолтаңбалар

Аяқталған дипломдық жоба үшін, оған қатысты бөлімдердің жобасын көрсетумен, кеңесшілер мен норма бақылаушының қойған

Бөлімдер атауы	**Кеңесшілер, аты, әкесінің аты, тегі (ғылыми дәрежесі, атағы)**	**Қол қойылған күні**	**Қолы**
Негізгі бөлім	Сагындыков Б.Ж. (физика-математика ғылымдарының кандидаты, қауымдастырылған профессор)	28.05.2024	
Норма бауқылаушы	Шатманов Ж.Ж. (физика-математика ғылымдарының кандидаты, қауымдастырылған профессор)	31.05.2024	

Ғылыми жетекші ____________ Б.Ж.Сагындыков

Білім алушы тапсырманы орындауға алды ____________ Б.М.Қамысбай

____________ М.М.Шәріпкан

Күні «28» 05 2024 ж.

АҢДАТПА

Бұл дипломдық жұмыс Хевисайд операторының әдісін және оның тұрақты және айнымалы коэффициенттері бар біртекті емес дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешуге арналған. Хевисайд операторының әдісі дифференциалдық теңдеулерді шешу саласындағы оңтайлы әдіс болып табылады, әсіресе аналитикалық әдістер жеткіліксіз немесе қолданылмайтын жағдайларда тиімді.

Жұмыстың нәтижесінде күрделі біртекті емес дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешуге арналған Хевисайд операторының әдісін қолдану арқылы жаңа нәтижелер алынды, ол физика, техника және математиканы қоса алғанда, ғылыми және инженерлік қолданбалардың кең ауқымы үшін пайдалы бола алады.

АННОТАЦИЯ

Дипломная работа посвящена методу оператора Хевисайда и его решению неоднородных дифференциальных уравнений и систем с постоянными и переменными коэффициентами. Операторный метод Хевисайда является оптимальным методом в области решения дифференциальных уравнений, особенно эффективным в тех случаях, когда аналитические методы недостаточны или неприменимы.

В работе получены новые результаты по использованию операторного метода Хевисайда для решения сложных неоднородных дифференциальных уравнений и систем, которые могут быть полезны для широкого круга научных и инженерных приложений, включая физику, технику и математику.

ANNOTATION

The thesis is devoted to the Heaviside operator method and its solution of inhomogeneous differential equations and systems with constant and variable coefficients. The Heaviside operator method is the optimal method for solving differential equations, especially effective in cases where analytical methods are insufficient or inapplicable.

The work obtained new results on the use of the Heaviside operator method for solving complex inhomogeneous differential equations and systems, which can be useful for a wide range of scientific and engineering applications, including physics, technology and mathematics.

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Зерттеудің өзектілігі: дифференциалдық теңдеу – бір немесе бірнеше белгісіз функциялар мен олардың туындылары арасындағы байланысты сипаттайтын математикалық теңдеу. Ол әртүрлі жүйелердің динамикасын модельдеуге негіз беретін инженерияда, физикада, экономикада және басқа салаларда маңызды рөл атқарады. Дифференциалдық теңдеулерді түсіну және шешу арқылы біз болжам жасауға, процестерді оңтайландыруға және нақты әлемдегі күрделі мәселелерді шеше аламыз. Дифференциалдық теңдеулерді ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында қолданады. Мысалы: Физикада кванттық механикаға дейінгі құбылыстарды зерттеуге мүмкіндік беретін қозғалысты, жылу ағынын және толқынның таралуын модельдеу үшін қолданылады.

Инженерлік: тиімділікті қамтамасыз ететін электр тізбектерін, механикалық жүйелер мен құрылымдарды жобалау және талдау үшін қажет.

Биология: популяция динамикасын, аурулардың таралуын және қоршаған ортаның өзара әрекеттесуін модельдеу үшін пайдаланылады, табиғи процестер мен оларды бақылау туралы түсінік береді.

Экономика: саясат пен инвестициялық шешімдерді ақпараттандыру үшін экономикалық өсуді, пайыздық мөлшерлемелерді және нарық динамикасын модельдеуге көмектеседі.

Дифференциалдық теңдеулер білім мен технологияны ілгерілетуде дамытуға, әртүрлі салаларда дәл болжауға және жаңа шешімдерге мүмкіндік береді. Осы дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін Хевисайдтың операторық әдісі қолданамыз. Бұл операторық әдіс қазіргі математика мен қолданбалы ғылымдарда өзекті және сұранысқа ие болып қалатын дифференциалдық теңдеулерді шешудегі негізгі құралдардың бірі болып табылады. Тұрақты және айнымалы коэффициенттері бар біртекті емес дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешуге арналған Хевсайд операторы әдісінің ғылыми-зерттеу өзектілігі оның әмбебаптығымен, қарапайымдылығымен, қолданудағы тиімділігімен және сандық әдістермен үйлесімділігімен түсіндіріледі. Қазіргі заманғы ғылыми зерттеулер мен әдісті тәжірибеде қолдану оның маңыздылығын және одан әрі даму перспективаларын растайды.

Зерттеудің мақсаты: тұрақты және айнымалы коэффициенттері бар біртекті емес дифференциалдық теңдеулер мен жүйелерді шешуге арналған Хевсайд операторының әдісін зерттеу.

Зерттеудің міндеті:

– дифференциалдық теңдеулердің теориялық негіздерін білу;

– біртекті емес дифференциалдық теңдеулер мен дифференциалдық теңдеулер жүйесін Хевисайд операторы әдісімен шешу алгоритмдерін құрастыру;

– біртекті емес дифференциалдық теңдеулер мен дифференциалдық теңдеулер жүйесіне әртүрлі мысалдарды Хэвисайд операторы әдісімен шешу;

– біртекті емес дифференциалдық теңдеулер мен айнымалы коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу үшін Хевсайд операторының әдісін қолдануды зерттеу.

Бұл жұмыста тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеудің оң жақ бөліктері квазикөпмүшеліктер болатын жағдайларды қарастырамыз. Сонымен қатар, мұндай теңдеулердің дербес шешімдерін табу үшін операторлық әдіс деп аталатын Хевисайд әдісін қолданамыз.

Зерттеудің құрылымы: дипломдық жұмыс 50 беттен, 4 бөлімнен, 1 кіріспеден, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттен тұрады.

1 Тұрақты коэффициенттері бар сызықтық біртекті теңдеулер

1.1 Операторлық көпмүшеліктер және олардың қасиеттері

Біртекті n-ші ретті тұрақты коэффциентті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін құрудың есебін қарастырайық

$$y^{n} + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (1.1)$$

Мұнда $a_1 \ldots . a_n$ – нақты сандар. Төмендегі теория күрделі коэффициенттер жағдайында толығымен дерлік ауыстырылады, бірақ біз тек нақты коэффициенттерді қарастырумен шектелеміз. Дифференциалдау амалын көрсету үшін біз Коши енгізген символизмді қолданамыз.

$$y' = Dy\,,\ y'' = D^2 y,\ \ldots,\ y^{(n)} = D^n y$$

Сонда (1.1) теңдеудің сол жақ бөлігі (1.2) теңдігімен анықталатын дифференциалдау операторының көпмүшелігі болады.

$$\mathcal{M}(D)y = D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} Dy + a_n y \qquad (1.2)$$

Қосындылау таңбасының көмегімен (1.2) теңдікті жалпы түрге келтірдік

$$\mathcal{M}(D)y = \sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} * y$$

мұнда a_k-нөлден басқа нақты сан.

Бұл жерде $\mathcal{M}(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k * D^{n-k}$ операторлық көпмүшелік деп аталады. Оператор көпмүшелік сызықтық оператор болып табылады. n-ші ретті туындылары бар кез-келген y_1 және y_2 және кез-келген тұрақты b_1, b_2 бірдей.

$$\mathcal{M}(D)[b_1 y_1 + b_2 y_2] = b_1 \mathcal{M}(D) y_1 + b_2 \mathcal{M}(D) y_2 \qquad (1.3)$$

Операторлық көпмүшеліктердің қосу және көбейту амалдарын пайдалану арқылы келесі теңдіктерді анықтаймыз:

$$[\mathcal{M}_1(D) + \mathcal{M}_2(D)]y = \mathcal{M}_1(D)y + \mathcal{M}_2(D)y \qquad (1.4)$$

$$[\mathcal{M}_1(D) * \mathcal{M}_2(D)]y = \mathcal{M}_1(D)y * \mathcal{M}_2(D)y \qquad (1.5)$$

Теңдікпен анықталған операторлық көпмүшеліктерді қосу амалы (1.4) коммутативті және ассоциативті заңдарға бағынады. Бұл жағдайда коэффициенттердің тұрақтылығы негізсіз болып шығады. Операторлық көпмүшеліктерді көбейту амалы бірдей заңдарға бағынатындығына көз жеткізу қиын емес, бірақ сонымен бірге коэффициенттердің тұрақтылығы маңызды. Операторлық көпмүшелерді көбейтудің коммутативті заңына бағынатындығының дұрыстығын дәлелдейік.

$$[\mathcal{M}_1(D) * \mathcal{M}_2(D)]y = [(\sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k}) * (\sum_{s=0}^{m} b_s D^{m-s})] = = (\sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k}) *$$

$$[\sum_{s=0}^{m} b_s D^{m-s} y] = = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_k b_s D^{n+m-k-s} y = (\sum_{s=0}^{m} b_s D^{m-s}) * [\sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} y] = = [\mathcal{M}_2$$

$$(D) * \mathcal{M}_1(D)]y$$

Ассоциативті заңының көбейту амалының дұрыстығын дәлелдеу осыған ұқсас.

Келесі есептеулер көпмүшелік операторлар үшін дистрибутивтік заңның дұрыстығын дәлелдейді.

$$\{\mathcal{M}_1(D) * [\mathcal{M}_2(D) + \mathcal{M}_3(D)]\} * y = \mathcal{M}_1(D) * \{[\mathcal{M}_2(D) + \mathcal{M}_3(D)] * y\} = = \mathcal{M}_1(D) * \{\mathcal{M}_2(D)y + \mathcal{M}_3(D)y\} = = \mathcal{M}_1(D)[\mathcal{M}_2(D)y] + \mathcal{M}_1(D)[\mathcal{M}_3(D)y] = = \{\mathcal{M}_1(D)\mathcal{M}_2(D) + \mathcal{M}_1(D)\mathcal{M}_3(D)\}y$$

немесе

$$\mathcal{M}_1(D) * [\mathcal{M}_2(D) + \mathcal{M}_3(D)] = \mathcal{M}_1(D)\mathcal{M}_2(D) + \mathcal{M}_1(D)\mathcal{M}_3(D) \quad (1.6)$$

(1.1) теңдеу үшін характеристикалық теңдеуді анықтаймыз

$$\mathcal{M}(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (1.7)$$

мұнда комплекс сан. Бұл көпмүшелік (1.1) теңдеу үшін характеристикалық көпмүше деп, ал $\mathcal{M}(\lambda) = 0$ теңдеуі характеристикалық теңдеу деп аталады. n-ші дәрежелі көпмүшеліктің n сызықтық көбейткіштерге жіктелетіні алгебраның негізгі теоремасынан белгілі, сонда:

$$\mathcal{M}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n) \quad (1.8)$$

Мұнда $\lambda_1, . . . , \lambda_n$ – характеристикалық теңдеудің түбірлері, олар нақты немесе жорамал сандар. $\lambda - \lambda_s$ көбейткіштерін көпмүшеліктерге көбейтудің қарапайым ережесі бойынша көбейтсек, характеристикалық көпмүшеліктердің түбірлері арқылы (1.1) теңдеудің барлық коэффициенттері үшін өрнек аламыз.

$$\begin{aligned} a_1 &= -\sum_{s=1}^{k}\lambda_s \\ a_2 &= \sum_s\sum_m \lambda_s\lambda_m \quad s < m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= (-1)^n\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \end{aligned} \quad (1.9)$$

Операторлық көпмүшеліктерге амалдар қарапайым көпмүшеліктер сияқты ережелерге бағынатындықтан, операторларды көбейту кезінде

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\ldots(D-\lambda_n)$$

операторлық көпмүшелік алынады, коэффициенттері (1.9) формуласымен анықталынады (1.7) формуладағы сияхты характеристикалық көпмүшеліктің коэффициенттері алынады. Сондықтан операторлық көпмүшелік көбейткіштерге бөлінеді.

$$\mathcal{M}(D)=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\ldots(D-\lambda_n) \qquad (1.10)$$

Көпмүшеліктің осы қасиетін операторлық көпмүшелікке қолданатын болсақ, онда (1.1) теңдеуді жазуға болады:

$$\mathcal{M}(D)y=(D-\lambda_1)\ldots(D-\lambda_n)y=0 \qquad (1.11)$$

Есептер шығару үшін операторлық көпмүшеліктің элементар функцияларға тигізетін әсерлерін келесі формулалар арқылы өрнектейміз:

1 $\mathcal{M}(D)e^{\lambda x}=e^{\lambda x}\mathcal{M}(\lambda)$

2 $\mathcal{M}(D^2)\cos\beta x = \cos\beta x\,\mathcal{M}(-\beta^2)$

3 $\mathcal{M}(D^2)\sin\beta x = \sin\beta x\mathcal{M}(-\beta^2)$

4 $\mathcal{M}(D)[e^{\lambda x}f(x)]=e^{\lambda x}\mathcal{M}(D+\lambda)f(x)$

Соңғы формула ығысу формуласы деп аталады. Осы формулаларды дәлелдеп көрейік:

1 $\sum_{k=0}^{n}a_kD^{nk}e^{\lambda x}=e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^{n-k}$

2 $\sum_{k=0}^{n}a_kD^{2(n-k)}\cos\beta x = \cos\beta x\sum_{k=0}^{n}a_k(-\beta^2)^{n-k}$

2 $\sum_{k=0}^{n}a_kD^{2(n-k)}\sin\beta x = \sin\beta x\sum_{k=0}^{n}a_k(-\beta^2)^{n-k}$

4 Ығысу формуласын екі кезеңмен дәлелдейміз. Біріншіден, туындының «m» ретті туындысы үшін Лейбниц формуласын қолданамыз.

$$D^m[e^{\lambda x}f(x)]=$$

$$= \sum_{s=0}^{m} C_m^s (D^s e^{\lambda x})(D^{m-s} f(x)) = \sum_{s=0}^{m} C_m^s \lambda^s e^{\lambda x} D^{m-s} f(x) = \; = e^{\lambda x} (\sum_{s=0}^{m} C_m^s \lambda^s e^{\lambda x} D^{m-s}) f(x) = e^{\lambda x}$$

$$(D+\lambda)^m f(x)$$

Алынған формула D^m бірмүшелі оператор үшін ығысу формуласы болып табылады. Жалпы жағдайға

$$\mathcal{M}(D)[e^{\lambda x}f(x)] = \sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k}[e^{\lambda x}f(x)] = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{\lambda x}(D+\lambda)^{n-k}f(x) = = e^{\lambda x}[\sum_{k=0}^{n} a_k (D+\lambda)^{n-k}$$
$$]f(x) = e^{\lambda x}\mathcal{M}(D+\lambda)f(x)$$

1.1.1 Характеристикалық теңдеудің барлық түбірлері қарапайым болған жағдайда коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімінің түріп

(1.1) теңдеудің жалпы шешімі характеристикалық теңдеудің жай, еселі және өзара түйіндес комплекс түбірлеріне қатысты құралады.

Алдымен харктеристикалық теңдеудің барлық түберлері жай түбірлер болатын жағдайды қарастырамыз. Сонымен бұл жағдай (1) теңдеу

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\ldots\ldots(D-\lambda_n)y = 0$$

түрінде жазылады. Бұдан $(D-\lambda_s)y = 0$ (1.12) s=1,…,n түріндегі бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл теңдеулердің әрқайсысы оңай интегралданады.

Мысалы $(D-\lambda_s)y = 0$ $\longrightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \lambda_1 y$

Соңғы теңдеу айнымалылары ажыратылытын бірінші ретті дифференциалдық теңдеу. Айнымалылары ажыратып интегралданған соң

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \ldots, \varphi_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

түріндегі дербес шешімдердің жиынтығын аламыз. Бұл дербес шешімдер өзара сызықты – тәуелсіз функциялар. Сондықтан олар шешімнің фундаменталды жүйесін құрайды.

Теорема 1. Характеристикалық теңдеудің барлық түбірлері қарапайым болған жағдайда дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі (1.1) түрінде болады.

$$y = \sum_{s=1}^{n} C_s e^{\lambda_s x} \qquad (1.13)$$

(1.13) формула характеристикалық теңдеудің түбірлері күрделі болған жағдайында жарамды.Соңғы жағдайда $e^{\lambda_s x}$ функциялары нақты айнымалының күрделі функциялары болады. Егер есептің шарттарына сәйкес нақты функциялармен жұмыс істеу ыңғайлырақ болса, онда $e^{\lambda_s x}$ түріндегі шешімдердің сәйкес бұзылмайтын сызықтық түрлендіруін пайдалана отырып, нақты шешімдердің жүйесін құру қажет. Енді характеристикалық теңдеудің түбірлерінің ішінде бір ғана өзара түйіндес комплекс түбір бар жағдайын қарастырайық.

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ мұнда $i^2 = -1$

Негізгі шешімдер жүйесін $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_n(x)$ келесі сызықтық түрлендіруге келтіреміз:

$$\begin{aligned}
&\psi_1(x) = \frac{1}{2}e^{\lambda_1 x} + \frac{1}{2}e^{\lambda_2 x};\\
&\psi_2(x) = \frac{1}{2i}e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2i}e^{\lambda_2 x};\\
&\psi_3(x) = \varphi_3(x);\\
&\qquad \ldots\ldots\\
&\psi_n(x) = \varphi_n(x)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Бұл түрлендірудің матрицасын жазу үшін $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *функциялары арқылы өрнектейік*

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) = \varphi_1$$

$$\psi_1(x) - \psi_2(x) = \varphi_2$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}[e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x}] = \frac{1}{2}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{1} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}[e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}] = ie^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} = ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

Сондықтан,

$\psi_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $\psi_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $\psi_3(x) = e^{\lambda_3 x}$, … , $\psi_n(x) = e^{\lambda_n x}$

Функциялар жүйесі фундаменталды болады. Егер характеристикалық теңдеудің түбірлерңнің ішінде бірнеше қос комплекс түбірлер болса, онда характеристикалық теңдеудің әрбір қос түбіріне $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ түріндегі дербес шешімдер сәйкес келеді.

Бірінші мысал ретінде гармоникалық тербелістердің теңдеуін қарастырайық (үйкеліс жоқ кезде).

Мысал 1 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$ характеристикалық теңдеуін құрамыз. Бұдан $\lambda = \pm i\omega$ жорамал түбірлері бар. Өзара түйіндес комплекс түбірлерге сәйкес $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ шешімдері табылды. Жалпы шешімі мына түрде болады $x = C_1 \cos \omega t + + C_2 \sin \omega t$.

Екінші мысал ретінде үйкеліс тербеліс жүйесін сипайттайтын мысал қарастырайық.

Мысал 2 $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + a^2 x = 0, \ 0 < \alpha < a$

$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + a^2 = 0$ характеристикалық теңдеуінің $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{a^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\beta$; $\beta = \sqrt{a^2 - \alpha^2}$ өзара түйіндес комплекс сандар. Өшпелі тербелістерді сипаттайтын теңдеудің жалпы шешімі $x = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$ теңдігі арқылы өрнектеледі, мұнда $\beta = \sqrt{a^2 + \alpha^2}$.

1.1.2 Характеристикалық теңдеуінің еселі түбірлерінің қатысуымен тұрақты коэффициентті сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімі

Характеристикалық теңдеудің k әртүрлі $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$; $k \ (k < n)$ түбірлері бар делік. Осы түбірлердің еселігін тиісінше $m_1,\ldots,m_n$ деп белгілейміз. Осы түбірлерге қатысты (1.10) операторлық көпмүшелікті көбейткіштерге жіктейік:

$$\mathcal{M}(D) = (D - \lambda_1)^{m_1}(D - \lambda_2)^{m_2}\ldots(D - \lambda_k)^{m_k} \qquad (1.16)$$

Мұнда $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ екенін ескереміз. Сонда (1.1) теңдеудің, яғни $\mathcal{M}(D)y = (D - \lambda_1)^{m_1}(D - \lambda_2)^{m_2}\ldots(D - \lambda_k)^{m_k} y = 0$ теңдеуінің барлық дербес шешімдерін

$$(D - \lambda_s)^{m_s} y = 0 \qquad (1.17)$$

(1.17) теңдеуді $(D - \lambda_s)^{m_s - 1}(D - \lambda_s)y = 0$ түрінде жазуға болады, онда $(D - \lambda_s)y = 0$ теңдеуінің шешімі де (1.17) теңдеудің шешімі болып табылады. $(D - \lambda_s)y = 0$ түріндегі теңдеудің шешімі $C_s e^{\lambda_s x}$ арқылы өрнектелетіні жоғарыда көрсетілген , мұндағы C_s – кез келген тұрақты. Осылайша біз характеристикалық теңдеудің тек қарапайым түбірлері болатын жағдайын, (1.1) теңдеуі үшін “k” сызықты тәуелсіз шешімдерін аламыз. Егерде, характеристикалық теңдеудің түбірлерінің арасында еселік болса, онда $k < n$. Бұл ретте (1.1) теңдеуінің жалпы шешімін құру үшін "n" сызықты тәуелсіз шешімдер болуы қажет. (1.17) теңдеудің барлық шешімдерін табу үшін, тұрақтыны вариациялау әдісін қолданамыз, яғни оларды келесі түрде іздейміз:

$$y = C_s(x)e^{\lambda_s x} \tag{1.18}$$

(1.18) теңдеуіне (1.17) теңдеуіне қоямыз және ығысу формуласын пайдаланамыз, сонда

$$(D - \lambda_s)^{m_s}[C_s(x)e^{\lambda_s x}] = e^{\lambda_s x}\,[D + \lambda_s - \lambda_s]^{m_s}C_s(x) = 0$$

Бұдан, $D^{m_s}C_s(x) = 0, \quad C_s(x) = C_{1s} + C_{2s}x + ... + C_{m_s s}x^{m_s - 1}$ (1.19)

(1.19) формуладағы тұрақтылардың біреуін ғана бірге қалғандарын нөлге теңдеп алсақ, онда әрбір еселігі m_s – қа тең түбірі үшін дәл m_s дербес шешімін табамыз: $e^{\lambda_s x}, xe^{\lambda_s x}, ..., x^{m_s - 1}e^{\lambda_s x}$. Сонда дербес шешімдердің қосындысы

$$m_1 + m_2 + ... + m_k = n$$

Бұл шешімдер өзара сызықтық-тәуелсіз болады. Бұл функциялардың α ерікті күрделі коэффициенттері бар сызықтық комбинациясын қарастырайық.

Теорема 2 Характеристикалық теңдеудің еселі түбірлері үшін (1.1) теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \sum_{s=1}^{m}\rho_{m_s - 1}(x)e^{\lambda_s x} \tag{1.21}$$

мұнда $\rho_{m_s - 1}(x)$ – дәрежесі түбірдің еселігіне тең коэффиценттері кез келген көпмүшеліктер. Егер характеристикалық теңдеудің түбірлерінің арасында еселі комплекс түбірлер болса, онда $\lambda_1(m)$ *еселігі бар.* Онда оған дәл сондай еселіктегі, λ_2 түйіндес түбірі сай келеді ($\lambda_2 = \alpha - i\beta$).

Еселегі m_1 *– ге тең түбірлерге* комплекс дербес шешімдер сәйкес болады:

$$\begin{gathered} e^{(\alpha + i\beta)x}, xe^{(\alpha + i\beta)x}, ... x^{m_1 - 1}e^{(\alpha + i\beta)x} \\ e^{(\alpha - i\beta)x}, xe^{(\alpha - i\beta)x}, ... x^{m_1 - 1}e^{(\alpha - i\beta)x} \end{gathered} \tag{1.22}$$

Бұл комплекс дербес шешімдерден жоғарыда көрсетілген түрлендірулердің көмегімен нақты дербес шешімдерге көшеміз:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x\,, xe^{\alpha x}\cos\beta x\,, \ldots x^{m_1-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad (1.23)$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x\,, xe^{\alpha x}\sin\beta x\,, \ldots x^{m_1-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

(1.23) тің шешімі (1.22) ні сызықты түрлендірудің нәтижесінде, нөлден өзгеше анықтауышпен алынуы мүмкін. Сондықтан (1.22) шешімдердің сызықтық тәуелсіздігінен (1.23) шешімдердің сызықтық тәуелсіздігі шығады.

Қорытынды: Егер характеристикалық теңдеудің $2p$ күрделі түбірлері және q нақты түбірлері болса $(2p + q = k)$, онда (1)-ші сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі нақты пішінде мына түрде болады:

$$y = \sum_{s=1}^{q}\rho_{m_s-1}(x)e^{\lambda_s x} + \sum_{j=q+1}^{q+p} e^{\alpha_j x}[\rho^{(')}_{m_j-1}(x)\cos\beta_j x + \rho^{(2)}_{m_j-1}(x)\sin\beta_j x\,] \qquad (1.24)$$

Мұндағы $\rho^{(')}_{m_j-1}(x)$ және $\rho^{(2)}_{m_j-1}$, $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ $(j = q+1,\ldots,p+q)$ еселі комплекс түбірінің дәрежесі бірден аз болатын еркін коэффициенттері бар көпмүшелік.

Осылайша, (1.1) теңдеуін интегралдау n-ші дәрежелі көпмүшенің түбірлерін іздеп табатын алгебралық тапсырмаға келеді.

Операторлық формада берілген 3-ші ретті теңдеуді қарастырамыз.

Мысал 3 $D(D-1)^3(D^2-4D+13)^2y = 0$

Характеристикалық теңдеуді құрамыз:

$$\lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1\,, \lambda_5 = \lambda_6 = 2+3i\,, \lambda_7 = \lambda_8 = 2-3i$$

(1.21) формуласына сәйкес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі жазамыз:

$$y = C_1 + (C_2 + C_3x + C_4x^2)e^x + e^{2x}[(C_5 + C_6x)\cos 3x + (C_7 + C_8x)\sin 3x\,]$$

Мысал 4

$$D^3(D^2+9)^2y = 0\ ;\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\,, \lambda_4 = \lambda_5 = 2i\,, \lambda_6 = \lambda_7 = -2i$$

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + (C_4 + C_5x)\cos 2x + (C_6 + C_7x)\sin 2x$$

2 Біртекті емес тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер

2.1 Операторлық көпмүшелікке кері оператор

Егер біртекті теңдеудің шешімдерінің фундаменталды жүйесі белгілі болса, онда біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін тұрақтыны вариациалау әдісімен табуға болады. Алайда іс жүзінде бұл әдіс үлкен есептеулермен байланысты. Операторлы көпмүшеліктің кері операторын анықтау арқылы есептеулерді біршама жеңілдетіге болады. Біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеуді операторлық түрде жазайық.

$$\mathcal{M}(D)y = f(x) \tag{2.1}$$

Қарапайым біртекті емес дифференциалдық теңдеулердің қатарына $y' = Dy = f(x)$; $y^{(r)} = D^r y = f(x)$ теңдеулер жатады. Алғашқы функцияның туындысы үзіліссіз функцияны береді.

$F(x) = \int f(x)dx$ - $\int$ $(интеграл)$ таңбасы арқылы белгілейміз, сонда

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$\int$ $(интеграл)$ таңбасын $\frac{1}{D}$ символымен арқылы белгілейміз. Сонда соңғы тепе-теңдік мына түрде болады: $D[\frac{1}{D}f(x)] = f(x)$. Осыған ұқсас $D^r y = f(x)$ теңдеуі қайталама интегралдау амалының көмегімен табылады және $\frac{1}{D^r}f(x)$ символы арқылы белгіленеді. Сонда $\left(\int \ldots \int f(x)dx^r\right)^{(r)} \equiv f(x)$ тепе-теңдігі жаңа символдың көмегімен $D^r(\frac{1}{D^r}f(x)) = f(x)$ арқылы жазылады.

Дирихле формуласының көмегімен $\frac{1}{D^r}$ операторының мәні біреселі интеграл

$$\frac{1}{D^r}f(x) = \boxed{\frac{1}{(r-1)!}}\int_{x_0}^{x} (x-\xi)^{r-1} f(\xi)d\xi \tag{2.2}$$

Анықтама. Оператордың көпмүшелікке кері оператор немесе кері оператор деп, әрбір үзіліссіз $f(x)$ функциясын n-рет дифференциалданатын $\boxed{\frac{1}{\mathcal{M}(D)}}$

$f(x)$ функцияны сәйкес қою заңын айтады.

$$\mathcal{M}(D)[\frac{1}{\mathcal{M}(D)}f(x)] \equiv f(x) \tag{2.3}$$

Кері операторларды қосу әрекеті мына теңдікпен анықталады:

$$[\frac{1}{\mathcal{M}_1(D)} + \frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}]f(x) = \frac{1}{\mathcal{M}_1(D)}f(x) + \frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}f(x) \tag{2.4}$$

Тік және кері операторлардың көбейтіндісі мына теңдіктермен анықталады:

$$[\mathcal{M}_1(D)\frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}]f(x) = \mathcal{M}_1(D)[\frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}f(x)] \tag{2.5}$$

$$[\frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}\mathcal{M}_1(D)]f(x) = \frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}[\mathcal{M}_1(D)f(x)] \tag{2.6}$$

$$[\frac{1}{\mathcal{M}_1(D)} * \frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}] \qquad f(x) = \frac{1}{\mathcal{M}_1(D)}[\frac{1}{\mathcal{M}_2(D)} \qquad f(x)]$$

(2.7)

Кері оператордың қасиеттері:

1 Орын иеленетін тепе-теңдік

$$\frac{1}{\mathcal{M}(D)}[\mathcal{M}(D)f(x)] \equiv f(x) \tag{2.8}$$

Дәлелдеуі. $f(x)$ – n рет дифференциалданатын кез келген функция делік. $\mathcal{M}(D)f(x) \equiv g(x)$ белгіленуін енгізейік.

Анықтама бойынша $f(x) = \frac{1}{\mathcal{M}(D)}g(x)$

Екінші жағынан $\frac{1}{\mathcal{M}(D)}[\mathcal{M}(D)f(x)] = \frac{1}{\mathcal{M}(D)}g(x) = f(x)$ (2.8) тепе-теңдігін (2.3) тепе-теңдігімен бірге мына түрде жазуға болады:

$$\frac{1}{\mathcal{M}(D)}\mathcal{M}(D) = 1 = \mathcal{M}(D)\frac{1}{\mathcal{M}(D)} \tag{2.9}$$

мұнда "1" бірдей түрлендіру операторын білдіреді.

2 Кері операторларды қосу коммутативті және ассоциативті заңдарға бағынады.

3 Тік және кері операторлардың көбейтіндісі коммутативтік заңдылыққа бағынады.

$$\mathcal{M}_1(D)[\frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}f(x)] = \frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}[\mathcal{M}_1(D)f(x)]$$

$$\mathcal{M}_1(D)\frac{1}{\mathcal{M}_2(D)} = \frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}\mathcal{M}_1(D) \qquad (2.10)$$

Соңғы қасиет бөлшек оператор ұғымы алып келеді.

$$\frac{\mathcal{M}_1(D)}{\mathcal{M}_2(D)} = \mathcal{M}_1(D)\frac{1}{\mathcal{M}_2(D)} = \frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}\mathcal{M}_1(D) \qquad (2.11)$$

4 Кері операторлардың көбейту әрекеті коммутативті және ассоциативті заңдарға бағынады

$$\mathcal{M}_1(D)[\mathcal{M}_2(D)y] = f(x)$$
$$\mathcal{M}_2(D)[\mathcal{M}_1(D)y] = f(x)$$

сәйкес келеді. Олардың біріншісінің шешімі $y = \frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}[\frac{1}{\mathcal{M}_1(D)}f(x)]$ түрінде, ал екіншісінің шешімі $y = \frac{1}{\mathcal{M}_1(D)}[\frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}f(x)]$ түрінде болады. Сондықтан,

$$\frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}[\frac{1}{\mathcal{M}_1(D)}f(x)] = y = \frac{1}{\mathcal{M}_1(D)}[\frac{1}{\mathcal{M}_2(D)}f(x)]$$

немесе $\frac{1}{\mathcal{M}_2(D)} * \frac{1}{\mathcal{M}_1(D)} = \frac{1}{\mathcal{M}_1(D)\mathcal{M}_2(D)}$

5 Кері оператор сызықты оператор.

Дәлелдеуі.

$\mathcal{M}(D)y_1 = f_1(x)$, яғни $y_1 = \frac{1}{\mathcal{M}(D)}f_1(x)$

$\mathcal{M}(D)y_2 = f_2(x)$, яғни $y_2 = \frac{1}{\mathcal{M}(D)}f_2(x)$ болсын.

Суперпозиция принципі бойынша, $\mathcal{M}(D)y = b_1f_1(x) + b_2f_2(x)$ теңдеуінің шешімі$y = b_1y_1 + b_2y_2 = b_1\frac{1}{\mathcal{M}(D)}f_1(x) + b_2\frac{1}{\mathcal{M}(D)}f_2(x)$түріндеболадынемесе $\frac{1}{\mathcal{M}(D)}$ $[b_1f_1(x) + b_2f_2(x)] = b_1\frac{1}{\mathcal{M}(D)}f_1(x) + b_2\frac{1}{\mathcal{M}(D)}f_2(x)$

Мұндағы b_1, b_2 кез келген тұрақтылар.

6 Кері оператор $\dfrac{1}{(D-\lambda)^r}$ түріндегі қарапайым операторларға жіктелуге мүмкіндік береді.

$\mathcal{M}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ болсын, онда алгебралық $\dfrac{1}{\mathcal{M}(\lambda)}$ бөлшектерінің жіктелуі, қарапайым түріде былай болады:

$$\frac{1}{\mathcal{M}(\lambda)} = \sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}\frac{A_{sr}}{(\lambda-\lambda_s)^r} \tag{2.12}$$

Демек кері операторды $\dfrac{1}{(D-\lambda)^r}$ түріндегі кері операторлардың сызықтық комбинациясы бойынша көрсетуге болады:

$$\frac{1}{\mathcal{M}(D)} = \sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}\frac{A_{sr}}{(D-\lambda_s)^r} \tag{2.13}$$

$\mathcal{M}(\lambda)$ көпмүшесінің $(\lambda-\lambda_s)^r$ ге дербес бөлінуін $\mathcal{M}_{sr}$ арқылы белгілейміз. (2.12) нің жіктелуінен тікелей $\sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}A_{sr}\mathcal{M}_{sr}(\lambda) = 1$ екені шығады. Сондықтан $\mathcal{M}(D) = \mathcal{M}_{sr}(D)(D-\lambda_s)^r$,

$$\sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}A_{sr}\mathcal{M}_{sr}(D) = 1 \tag{2.14}$$

$$y = \sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}\frac{A_{sr}}{(D-\lambda_s)^r}f(x) \tag{2.15}$$

7 Кері оператордың элементар функцияларға әсері келесі формулалардан шығады:

1 $\dfrac{1}{\mathcal{M}(D)}e^{\lambda x} = \dfrac{e^{\lambda x}}{\mathcal{M}(\lambda)}$, егер $\mathcal{M}(\lambda) \neq 0$

2 $\frac{1}{\mathcal{M}(D^2)}\cos\beta x = \frac{\cos\beta x}{\mathcal{M}(-\beta^2)}$, егер $\mathcal{M}(-\beta^2) \neq 0$

3 $\frac{1}{\mathcal{M}(D^2)}\sin\beta x = \frac{\sin\beta x}{\mathcal{M}(-\beta^2)}$, егер $\mathcal{M}(-\beta^2) \neq 0$

4 $\frac{1}{\mathcal{M}(D)}[e^{\lambda x}f(x)] = e^{\lambda x}\frac{1}{\mathcal{M}(D+\lambda)}f(x)$

Соңғы формула ығысу формуласы деп аталады.

Олардың әрқайсысының дәлелденуі операторлық көпмүшенің сәйкес формулаларынан туындайды.

1 $\mathcal{M}(D)\frac{e^{\lambda x}}{\mathcal{M}(\lambda)} = \frac{1}{\mathcal{M}(\lambda)}\mathcal{M}(D)e^{\lambda x} = \frac{\mathcal{M}(\lambda)}{\mathcal{M}(\lambda)}e^{\lambda x} = e^{\lambda x}$

2 $\mathcal{M}(D^2)\frac{\cos\beta x}{\mathcal{M}(-\beta^2)} = \frac{1}{\mathcal{M}(-\beta^2)}\mathcal{M}(D^2)\cos\beta x = \frac{\mathcal{M}(-\beta^2)}{\mathcal{M}(-\beta^2)}\cos\beta x = \cos\beta x$

3 $\mathcal{M}(D^2)\frac{\sin\beta x}{\mathcal{M}(-\beta^2)} = \frac{1}{\mathcal{M}(-\beta^2)}\mathcal{M}(D^2)\sin\beta x = \frac{\mathcal{M}(-\beta^2)}{\mathcal{M}(-\beta^2)}\sin\beta x = \sin\beta x$

4 $\mathcal{M}(D)[e^{\lambda x}\frac{1}{\mathcal{M}(D+\lambda)}f(x)] = e^{\lambda x}\mathcal{M}(D+\lambda)\frac{1}{\mathcal{M}(D+\lambda)}f(x) = e^{\lambda x}f(x)$

Мысал 5 $y'' - 10y' + 25y = x^2e^{5x}$ теңдеуінің дербес шешімін табу қажет. Операторлық түрі $(D^2 - 10D + 25)y = x^2e^{5x}$

$$y = \frac{1}{D^2 - 10D + 25}x^2e^{5x} = \frac{1}{(D-5)^2}x^2e^{5x} = \frac{1}{(D-5)^2}e^{5x}x^2 =$$

$$= \frac{1}{(D-5)^2}e^{5x}x^2 = e^{5x}\frac{1}{(D-5+5)^2}x^2 = e^{5x}\frac{1}{D}x^2 = \frac{x^4e^{5x}}{12}$$

2.2 Біртекті емес n-ші ретті тұрақты коэффицентті сызықты дифференциалдың теңдеудің дербес шешімін операторлық әдістің көмегімен табу

$y = \sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}\frac{A_{sr}}{(D-\lambda_s)^r}f(x)$ (2.15) функциясы (2.1) теңдеудің шешімі болады. (2.15) формуласы біртекті емес сызықты теңдеудің дербес шешемін алуға болады. Ол үшін $\frac{1}{(D-\lambda)^r}f(x)$ функциясының мәнін табуымыз керек:

$$\frac{1}{(D-\lambda)^r}f(x) = \frac{1}{(D-\lambda)^r}e^{\lambda x}e^{-\lambda x}f(x) = e^{\lambda x}\frac{1}{D^r}[e^{-\lambda x}f(x)]$$

(2.2) Дирихле формуласының көмегімен

$$\frac{1}{(D-\lambda)^r}f(x) = e^{\lambda x}\frac{1}{(r-1)!}\int_{x_0}^{x} e^{-\lambda\xi}(x-\xi)^{r-1}f(\xi)d\xi = = \frac{1}{(r-1)!}\int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\xi)}(x-\xi)^{r-1} f(\xi)d\xi$$

Осы нәтижені пайдалана отырып, (2.1) теңдеудің дербес шешімін аламыз:

$$y = \sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}\frac{A_{sr}}{(r-1)!}\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_s(x-\xi)}(x-\xi)^{r-1}f(\xi)d\xi \qquad (2.16)$$

$$G(x) = \sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}\frac{A_{sr}}{(r-1)!}e^{\lambda x}x^{r-1} \qquad (2.17)$$

теңдігі арқылы Грин функциясы деп аталатын $G(x)$ енгіземіз.

Бұл функция (2.1) теңдеуінің оң жақ бөлігіндегі түрінен тәуелсіз және теідеудің сол жақ бөлігі арқылы анықталады. Сызықты дифференциалдық теңдеудің сол жақ бөлігі жүйенің ішкі қасиеттерін сипаттайды, ал оң жақ бөлігі сыртқы әсерді сипаттайды. (2.16) формула теңдеудің оң жақ және $G(x)$ Грин функциясынан үйірткі типтес интегралды анықтайды:

$$y = \int_{x_0}^{x} G(x-\xi)f(\xi)d\xi \qquad (2.18)$$

Мысал 6 $y'' - 4y' + 4y = -\frac{e^{2x}}{x^2}$

Характеристикалық теңдеу: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Біртекті теңдеудің жалпы шешімі: $y = e^{2x}(C_1 + C_2x)$

Біртекті емес теңдеудің дербес шешімі:

$$y = \frac{1}{D^2 - 4D + 4}\left(-\frac{e^{2x}}{x}\right) = -\frac{1}{(D-2)^2}\frac{e^{2x}}{x} = -e^{2x}\frac{1}{D^2}\frac{1}{x^2} = e^{2x}\ln|x|$$

Біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі: $y = e^{2x}(C_1 + C_2x + \ln|x|)$

Осы есепті тұрақтыны вариациялау әдісімен ажыратып көрейік. Ол үшін $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$ арқылы біртекті теңдеудің дербес шешімдерін белгілейік. Содан кейін тұрақтыны вариациялау әдісінің жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) = 0, \\ C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x) = f(x) = -\dfrac{e^{2x}}{x^2} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x}$$

$$\Delta y_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ \dfrac{e^{2x}}{x^2} & e^{2x} + 2x^{2x} \end{vmatrix} = \frac{e^{4x}}{x}, \quad C_1'(x) = \frac{\Delta y_1'(x)}{\Delta} = \frac{1}{x}$$

$$\Delta y_2'(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \dfrac{e^{2x}}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{e^{4x}}{x^2}, \quad C_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta y_1'(x)}{\Delta} = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \ C_1(x) = \ln|x| + C_1$$

$$C_2'(x) = -\frac{1}{x^2} \ \rightarrow \ C_2(x) = \frac{1}{x} + C_2$$

$$y_x = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = (C_1 + \ln|x|)y_1(x) + \left(C_2 + \frac{1}{x}\right) y_1(x) = (C_1 + + \ln|x|)e^{2x}$$
$$+ \left(C_2 + \frac{1}{x}\right)xe^{2x} = e^{2x}(C_1 + C_2 x + \ln|x| + 1) = e^{2x}(C_1 + C_2 x + \ln|x|)$$

Оң жақ бөлігі квазиполином болатын теңдеулер. Егер оң жақ бөлігі $e^{\mu x}$ $\rho(x)$ түріндегі квазиполином болса, онда біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табу айтарлықтай жеңілдейді. Мұнда $\rho(x)$ көпмүше.

Алдымен,

$$\mathcal{M}(D)y = \rho(x); \tag{2.19}$$

теңдеуінің дербес шешімін табу есебін бастаймыз.

Мұнда $\rho(x) = b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \ldots + b_r$ түріндегі көпмүшелік.

а) $\mathcal{M}(0) = a_n \neq 0$

Алгебрадан келесі мәлімдеме белгілі:

$L(\lambda)$ - l дәрежелі көпмүшелік, $\mathcal{M}(\lambda)$ - n дәрежелі көпмүшелік, сонымен қатар $l \geq n$, онда жалғыз $l - n$ дәрежелі $N(\lambda)$ көпмүшелік және дәрежесі $n - 1$ ден үлкен емес жалғыз $R(\lambda)$ көпмүшесі бар болсын,онда тепе-теңдік мына түрде

$$L(\lambda) \equiv \mathcal{M}(\lambda)N(\lambda) + R(\lambda) \qquad (*)$$

Іс жүзінде $N(\lambda)$ және $R(\lambda)$ көпмүшелерінің коэффициенттері $L(\lambda)$ көпмүшелік $\mathcal{M}(\lambda)$ көпмүшелікке бөлудің белгілі алгоритмі арқылы табылады.

Бұл мәлімдеме $l < n$ жағдайындағы келесі жалпылауға мүмкіндік береді.

$''r''$ натурал саны берілсін. Ондай болса (*) тепе-теңдігі орын алатындай, $''r''$ - ға кем немесе тең λ дәрежелерін қамтымайтын, $''r''$ дәрежелі жалғыз $N(\lambda)$ көпмүшесі және $''n + r''$ дәрежелі жалғыз $R(\lambda)$ көпмүшелік бар болсын. $N(\lambda)$ және $R(\lambda)$ көпмүшеліктерінің коэффициенттері $L(\lambda)$ көпмүшелігін $\mathcal{M}(\lambda)$ көпмүшелігіне бөлудің бірдей алгоритмі арқылы табылады . Атап айтқанда, (*) тепе-теңдігі $L(\lambda) \equiv 1$ болған жағдайда да жарамды.

Барлық заңдар операторлық көпмүшеліктер үшін жарамды болғандықтан, олардың негізінде (*) тепе-теңдігі дәлелденеді, онда берілген r дәрежесі бар жалғыз оператор көпмүшелік $N(D)$ және берілген $n + r$ дәрежесі бар және r -дан кіші немесе оған тең дәрежелері қамтылмайтын жалғыз $R(D)$ көпмүшелігі бар болады, онда тепе-теңдік мынадай

$$1 \equiv \mathcal{M}(D)N(D) + R(D) \qquad (**)$$

Коэффициенттерді нақты есептер үшін бірлікті бөлінгіш ретінде қабылдау керек және бөлгішті - $\mathcal{M}(D)$ көпмүшесі D дәрежесінің жоғарылауы бойынша орналастырыңыз және көпмүшеліктің көпмүшелікке қарапайым бөліну схемасын қолданамыз.

1	$a_n + a_{n-1}D + \dots + D^n = \mathcal{M}(D)$
$f_1D^{r+1} + \dots + f_nD^{r+n} = R(D)$	$e_n + e_{n-1}D + \dots + e_0D^n = N(D)$

“Нақты” $N(D)$ " r " – дәрежелі көпмүшелікті алмағанша , “Бөлу” есептеледі. (**) тепе-теңдігінен $\rho(x) = \mathcal{M}(D)N(D)\rho(x) + R(D)\rho(x)$ шығады. $R(D)$ көпмүшесінде " r "-дан кіші немесе оған тең дәрежелер болмағандықтан, онда $R(D)\rho(x) \equiv 0$ және

$$y = \frac{1}{\mathcal{M}(D)}\rho(x) = N(D)\rho(x) = Q(x) \qquad (2.20)$$

Алынған қатынас , $\frac{1}{\mathcal{M}(D)}$ кері оператордың $\rho(x)$ көпмүшеге әрекеті $N(D)$ оператор көпмүшесінің $\rho(x)$ бойынша әрекетіне эквивалентті екенін білдіреді. e_r

$= \frac{1}{a_n} \neq 0$ болғандықтан (схемадан белгілі), онда $Q(x)$ көпмүшесі r дәрежеге ие.

Осылайша, егер $a_n \neq 0$ болса, онда (2.19) теңдеуінде $\rho(x)$ дәрежесімен бірдей көпмүше түрінде дербес шешім болады.

Мысал 7 $y'' - y' - 6y = 108x^2 - 36x + 6$

1 жолы. Характеристикалық теңдеуі: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$

Біртекті теңдеудің жалпы шешімі: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$. Біртекті емес теңдеудің дербес шешімін $y = Ax^2 + Bx + C$. Анықталмаған коэффициенттер түрінде іздейміз.

$$y'(x) = 2Ax + B$$

$$y''(x) = 2A$$

Сонда, $2A - 2Ax - B - 6Ax^2 - 6Bx - 6C = 108x^2 - 36x + 6$

Әрі қарай x-тің бірдей дәрежелерінің алдарындағы коэффиценттерін теңестіреміз:

$x^0: 2A - B - 6C = 0 \quad \rightarrow \quad 6C = -36 - 12 - 6 \rightarrow C = 9$

$x^1: -2A - 6B = -36 \quad \rightarrow \quad B = 12$

$x^2: -6A = 108 \quad \rightarrow 6C = -36 - 12 - 6 \rightarrow C = 9$

Демек, $y = -18x^2 + 12x - 9$. Жалпы шешімі $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} - -18x^2 + 12x - 9$

2 жолы Осы есепті операторлық тәсілдің көмегімен шығарамыз. Ол үшін $\frac{1}{D^2 - D - 6}$ кері операторын ашып жазамыз, яғни 1 санын $D^2 - D - 6$ операторлық көпмүшелігіне бұрыштап бөлеміз:

$$\begin{array}{l|l}
1 & -6 - D + D^2 \\ \cline{2-2}
\underline{1 + \frac{D}{6} - \frac{D^2}{6}} & -\frac{1}{6} + \frac{D}{36} - \frac{7D^2}{216} \\
\quad -\frac{D}{6} + \frac{D^2}{6} & \\
\quad \underline{-\frac{D}{6} - \frac{D^2}{36} + \frac{D^3}{36}} & \\
\qquad \frac{7D^2}{36} - \frac{D^3}{36} & \\
\qquad \underline{\frac{7D^2}{36} + \frac{7D^3}{216} - \frac{7D^4}{216}} &
\end{array}$$

$$-\frac{13D^3}{216}+\frac{7D^4}{216}$$

Сонымен, $\frac{1}{D^2-D-6}=-\frac{1}{6}+\frac{D}{36}-\frac{7D^2}{216}+\frac{\frac{-13D^2}{216}-\frac{7D^4}{216}}{D^2-D-6}$

Біртекті емес теңдеудің дербес шешімі:

$$y=\frac{1}{D^2-D-6}(108x^2-36x+6)=(-\frac{1}{6}+\frac{D}{36}-\frac{7D^2}{216})(108x^2-36x+6)==-18x^2+$$

$$6x-1+6x-1-7=-18x^2+12x-9$$

Біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі:

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}-18x^2+12x-9$$

Бұл мысал бөлу кезінде $D-нің$ дәрежесі $\rho(x)$ көпмүшелігінің дәрежесінен жоғары болса, онда оның $f(x)$ квазиполиномға әсері нөлге тең болады.

б) $\lambda=0$ саны характеристикалық көпмүшеліктің еселігі m-ға тең түбірі делік, яғни $a_n=a_{n-1}=...=a_{n-m+1}=0;\quad a_{n-m}\neq 0$

Бұл жағдайда (2.19) теңдеуді келесі түрде жазуға болады.

$\mathcal{M}_1(D)D^my=\rho(x);\quad \mathcal{M}_1(0)\neq 0\qquad D^my=z$ деп белгіленуін енгіземіз, сонда $\mathcal{M}_1(D)z=\rho(x)$ біртекті емес теңдеуінің дербес шешімі жоғарыда көрсетілгендей $z=Q_1(x)$ түрінде табылады, мұнда $Q_1(x)$ – r-ші дәрежелі көпмүшелік.

Бұдан,

$$y=\frac{1}{D^m}Q_1(x)=x^mQ(x) \qquad (2.21)$$

Теңдеудің дербес шешімін табу мәселесін қарастырайық.

$$\mathcal{M}(D)y=e^{\mu x} \qquad (2.22)$$

а) $\mathcal{M}(D)y=e^{\mu x}$ (2.22) теңдеуінің дербес шешемін табу есебін қарастырайық $\mathcal{M}(\mu)\neq 0$ делік, сонда

$$y=\frac{1}{\mathcal{M}(D)}e^{\mu x}=e^{\mu x}\frac{1}{\mathcal{M}(\mu)} \qquad (2.23)$$

Мысал 8 $y''-y'-6y=6e^{4x}$

$$y=\frac{1}{D^2-D-6}6e^{4x}=e^{4x}\frac{6}{4^2-4-6}=e^{4x}$$

б) $\mathcal{M}(\mu)=0$ делік, μ характеристикалық теңдеудің түбірі болатын жағдайды резонанстық жағдай деп атайды. μ түбірінің еселігі m болсын. Сонда характеристикалық көпмүшелік пен (2.22) теңдеу төменгі түрде жазылады $\mathcal{M}(\lambda) = \mathcal{M}_1(\lambda)(\lambda-\mu)^m$, $\mathcal{M}_1(\mu) \neq 0$

$$\mathcal{M}_1(D)(D-\mu)^m y = e^{\mu x} \qquad (2.24)$$

Белгілеу енгземіз $(D-\mu)^m y = z$. Сонда $\mathcal{M}_1(D)z = e^{\mu x}$. Жоғарыда көрсетілгендей (2.23) формулаға сәйкес

$$z = e^{\mu x}\frac{1}{\mathcal{M}_1(\mu)}$$

$$y = \frac{1}{(D-\mu)^m}e^{\mu x}\frac{1}{\mathcal{M}_1(\mu)} = e^{\mu x}\frac{1}{D^m}\frac{1}{\mathcal{M}_1(\mu)} = x^m e^{\mu x}\frac{1}{m!\mathcal{M}_1(\mu)} \qquad (2.25)$$

Мысал 9 $y'' - y' - 6y = 5e^{3x}$; $\mathcal{M}(3) = 0$. Резонанс.

Характеристикалық теңдеу $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\mu = 3$,

$$\lambda_1 = \mu = 3$$

(2.25) формуланың көмегімен дербес шешімді табамыз.

$$y = \frac{1}{(D-3)(D+2)}5e^{3x} = e^{3x}\frac{1}{D(D+5)}5 = e^{3x}\frac{1}{D}1 = xe^{3x}$$

в) Қарастырылған (2.19) және (2.22) теңдеулер

$$\mathcal{M}(D)y = e^{\mu x}\rho(x) \qquad (2.26)$$

түрінде берілген жалпы теңдеуге көшуде мүмкіндік береді және оның ізделініп отырған дербес шешімі туралы тұжырымдамасы келесі теорема береді.

Теорема 3 (2.26) теңдеудің дербес шешімі ізделінеді, мұнда m түбірдің еселігі.

$$y = x^m e^{\mu x} Q(x) \qquad (2.27)$$

Резонанс болмаса, яғни $\mathcal{M}(\mu) \neq 0$ болса. Егер μ характеристикалық теңдеудің түбірі болса, онда $"m"$ оның еселігі .

Дәлелдеуі. m санының анықтамасынан былай шығады:

$$\mathcal{M}(D) = \mathcal{M}_1(D)(D-\mu)^m; \qquad \mathcal{M}_1(\mu) \neq 0 \qquad (2.28)$$

(2.28) ескере отырып, (2.26) теңдеуі $\mathcal{M}_1(D)(D-\mu)^m y = e^{\mu x}\rho(x)$

$$y = \frac{1}{(D-\mu)^m \mathcal{M}_1(D)} e^{\mu x} \rho(x) = e^{\mu x} \frac{1}{D^m \mathcal{M}_1(D+\mu)} \rho(x)$$

түрінде жазылады.

Себебі, $\mathcal{M}_1(D+\mu)$ бос мүше, яғни $\mathcal{M}_1(\mu) \neq 0$ нөлге тең емес, онда (2.20) формуласына сәйкес $\frac{1}{\mathcal{M}_1(D+\mu)}\rho(x) = Q(x)$. Мұндағы, $Q(x)$ көпмүшелік $\rho(x)$ бірдей дәрежедегі көпмүшелік.

Сондықтан, $y = e^{\mu x} \frac{1}{D^m} Q_1(x) = e^{\mu x} x^m Q(x)$.

Дәлелденген теорема теңдеудің түбірлері нақты және жорамал μ жағдайында да жарамды.

$$\mathcal{M}(D)y = e^{\alpha x}[\rho_1(x)\cos\beta x + \rho_2(x)\sin\beta x\ ] \qquad (2.29)$$

Теорема 4 $m = 0$ болсын, егер $\mathcal{M}(\alpha \pm i\beta) \neq 0$ болса. Егер $\alpha \pm i\beta$ характеристикалық теңдеудің түбірлері болса, онда m олардың еселігіне тең. Сонда (2.29) теңдеу келесідей түрде болады:

$y = x^m e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\ ]$, мұндағы Q_1, Q_2 көпмүшеліктердің кем дегенде біреуінің дәрежесі ρ_1, ρ_2 көпмүшеліктердің дәрежесінен үлкен .

Дәлелдеуі. Эйлер формуласы үшін $\cos\beta x$ және $\sin\beta x$ үшін қолданып, (2.29) теңдеуін түрлендіреміз.

$$\mathcal{M}(D)y = e^{(\alpha+i\beta)x}\left[\frac{\rho_1(x)}{2} + \frac{\rho_2(x)}{2i}\right] + e^{(\alpha-i\beta)x}\left[\frac{\rho_1(x)}{2} - \frac{\rho_2(x)}{2i}\right] \qquad (2.30)$$

Екі теңдеуді қарастырайық

$$\mathcal{M}(D)y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}\left[\frac{\rho_1(x)}{2} + \frac{\rho_2(x)}{2i}\right] \qquad (2.31)$$

$$\mathcal{M}(D)y_1 = e^{(\alpha-i\beta)x}\left[\frac{\rho_1(x)}{2} - \frac{\rho_2(x)}{2i}\right] \qquad (2.32)$$

Алдыңғы теорема осы теңдеулерге қолданылады және олардың оң жақ бөліктері түйіндес болғандықтан, олардың комплекс түйіндес шешімдері болады:

$$y_1 = x^m e^{(\alpha+i\beta)x} R(x)$$

$$y_2 = x^m e^{(\alpha - i\beta)x} R^*(x) \tag{2.33}$$

Мұндағы R-комплекс коэффициенттері бар дәрежелері ρ_1 , ρ_2 көпмүшелерінің дәрежелерінің ең үлкеніне тең көпмүшелік. Суперпозиция принципі негізінде қорытынды жасаймыз:

$y = y_1 + y_2 = x^m[e^{(\alpha + i\beta)x} R(x) + e^{(\alpha - i\beta)x} R^*(x)]$ *мұнда, $R(x)$*- ті $R(x) = \dfrac{Q_1(x) - iQ_2(x)}{2}$ түрінде көрсетеміз.

Мұнда $Q_1(x)$ және $Q_2(x)$ нақты коэффициенттері бар көпмүшеліктер. Олардың кем дегенде біреуінің дәрежесі $R(x)$ дәрежесіне тең, яғни $\rho_1(x)$ және $\rho_2(x)$ дәрежелерінен үлкен.

$$y = x^m e^{\alpha x}[(\cos\beta x + i\sin\beta x)\frac{Q_1(x) - iQ_2(x)}{2} + (\cos\beta x - i\sin\beta x)\frac{Q_1(x) + iQ_2(x)}{2}]$$

$$= = x^m e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x] \tag{2.34}$$

Теорема дәлелденді. Жоғарыда келтірілген теоремаларды дәлелдеу дербес шешімді табудың әдісі бола алады, бірақ жағдайға байланысты.

Мысал 10 $y'' - y' - 6y = 36xe^{4x}$, $\mathcal{M}(4) \neq 0$

$$y = \frac{1}{D^2 - D - 6}36xe^{4x} = e^{4x}\frac{1}{(D+4)^2 - (D+4) - 6}36x =$$

$$= e^{4x}(\frac{1}{6} - \frac{7}{36}D)36x = e^{4x}(6x - 7)$$

Мысал 11 $y'' - y' - 6y = 50xe^{3x}$, $\mathcal{M}(3) = 0$, резонанс $m = 1$

$$y = \frac{1}{(D-3)(D+2)}50xe^{3x} = e^{3x}\frac{1}{D(D+5)}50x = e^{3x}\frac{1}{D}(\frac{1}{5} - \frac{D}{25})50x = = e^{3x}(\frac{1}{5D} - \frac{1}{25})50x$$

$$= e^{3x}(5x^2 - 2x) = xe^{3x}(5x - 2)$$

11,12 мысалдары оң жақ бөлігіндегі нақты квазиполинум жағдайында операторлық әдісінің қолданылуын көрсетеді. (тригонометриялық функциялар болмайды). Келесі екі мысал, оң жақ бөлігі $\sin\beta x$, $\cos\beta x$ периодтық функциялар болғанда, ал операторлық көпмүшелік тек жұп дәрежелерін ғана қамтитын әдісті көрсетеді.

Мысал 12 $y'' + 4y = 5\sin 3x$, $\beta = 3$, $\mathcal{M}(-\beta^2) = \mathcal{M}(-9) \neq 0$

$$y = \frac{1}{D^2 + 4}5\sin 3x = \frac{5\sin 3x}{-9 + 4} = -\sin 3x$$

Дербес шешім периодтық емес, бұл күтілетін түрге сәйкес келеді.

Мысал 13 $y'' + 4y = 16x\cos 2x$, $\mathcal{M}(-\beta^2) = -4 + 4 = 0$

Резонанс $m = 1$

Дербес шешімнің күтілетін түрі $y = x[(A_1x + A_2)\cos 2x + (B_1x + B_2)\sin 2x]$

Бұл жағдайда анықталмаған коэффициенттер әдісін қолдану үлкен есептеулермен байланысты.

$$y = \frac{1}{D^2+4}16Rexe^{2ix} = Ree^{2ix}\frac{1}{(D+2i)^2+4}16x = Ree^{2ix}\frac{1}{D(D+4i)}16x = Ree^{2ix}\frac{1}{D}(\frac{1}{4i} + + \frac{D}{16})16x = Ree^{2ix}(\frac{2x^2}{i} + x) = x\cos 2x + 2x^2\sin 2x$$

Егер $\mathcal{M}(D)y = \sin\beta x$ немесе $\cos\beta x$ теңдеуінде $\mathcal{M}(D)$ көпмүшесінде D жұп және тақ дәрежелері болса, оны келесідей шешуге болады.

$$y = \frac{1}{\mathcal{M}(D)}\sin\beta x = \mathcal{M}(-D)\frac{1}{\mathcal{M}(-D)\mathcal{M}(D)}\sin\beta x \ ;$$

$$\mathcal{M}(D)\mathcal{M}(-D) = \mathcal{M}_1(D^2)$$

$$y = \mathcal{M}(-D)\frac{\sin\beta x}{\mathcal{M}_1(-\beta^2)}$$

Мысал 14 $y'' - y' - 6y = e^{3x}\sin 2x$, $\mathcal{M}(3 \pm 2i) \neq 0$

$$y = \frac{1}{D^2 - D - 6}e^{3x}\sin 2x = \frac{1}{(D-3)(D+2)}e^{3x}\sin 2x = e^{3x}\frac{1}{D(D+5)}\sin 2x = e^{3x}\frac{1}{D}(5 - D)\frac{1}{25 - D^2}\sin 2x = e^{3x}(\frac{5}{D} - 1)\frac{\sin 2x}{25+4} = e^{3x}\frac{1}{29}(-\frac{5}{2}\cos 2x - \sin 2x) = = -\frac{1}{58}e^{3x}(5\cos 2x + \sin 2x)$$

3 Эйлер теңдеуі

Айнымалы коэффициенттері бар сызықтық теңдеуді Эйлердің атымен атаймыз

$$x^n\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}x\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x), \tag{3.1}$$

ол үшін сәйкесінше біртекті теңдеуді шешудің нақты жүйесін алгебралық жүйеге келтіреміз. ($a_1, a_2, \dots, a_n - const$)

Теорема 1 $x = e^t$ тәуелсіз айнымалысын өзгерту арқылы Эйлер теңдеуін тұрақты коэффициенттері бар теңдеуге келтіреміз.

Дәлелденуі. $x^k\frac{d^ky}{dx^k}$ $(k=1,...,n)$ өрнегін, y функциясы t жаңа тәуелсіз айнымалысы бойынша туындыланатын, $L_k(y_t',...,y_t^{(k)})$ тұрақты коэффициенттері бар сызықтық комбинация екенін көрсетеміз.
Сонымен

$$x\frac{dy}{dx}=e^t\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^t\frac{dy}{dt}e^{-t}=L_1(y_t')$$

Кейбір s үшін индукция өткізейік

$$x^s\frac{d^sy}{dx^s}=L_s(y_t',...,y_t^{(s)})$$

сонда

$$x^{s+1}\frac{d^{s+1}y}{dx^{s+1}}=e^{(s+1)t}\frac{d}{dx}[L_sx^{-s}]=e^{(s+1)t}\frac{d}{dt}[L_tx^{-t}]\frac{dt}{dx}=$$
$$=e^{(s+1)t}[L_s(y_t'',...,y_t^{(s+1)})e^{-st}-sL_s(y_t',...,y_t^{(s)})e^{-st}]e^{-t}=$$
$$=L_s(y_t'',...,y_t^{(s+1)})-sL_s(y_t',...,y_t^{(s)})=L_{s+1}(y_t',y_t'',...,y_t^{(s+1)})$$

Осылайша,

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k}=L_k \tag{3.2}$$

y туындысының алдындағы L_{s+1} коэффициенті, y туындысының алдындағы L_s коэффициентіне тең және олар y туындысының алдындағы L_1 коэффициентіне тең екенің ескереміз, сонымен қатар олар 1-ге тең болады.
(3.2) теңдеуін (3.1) теңдеуіне ауыстырғаннан кейін, сол жақ бөлігі тәуелсіз айнымалыларды қамтымайтын теңдеуге айналады.

$$L_n+a_1L_{n-1}+...+a_{n-1}L_1+a_ny=f(e^t) \tag{3.3}$$

Барлық L_k $y_t^{(s)}$- ке салыстырмалы сызықты және тұрақты коэффициентті болғандықтан,

$$y_t^{(n)}+b_1y_t^{(n-1)}+...+b_{n-1}y_t'+b_ny=f(e^t) \tag{3.4}$$

түріндегі тұрақты коэффициенттері бар сызықтық теңдеу алынады.

(3.1) теңдеудің сол жақ бөлігі x ті $-x$ қа ауыстыруға қатысты инвариантты екенін байқаймыз, сондықтан $(x<0)$ кезіндегі $x=-e^t$ ауыстырылуы (3.1) теңдеуінің сол жағын және шешімдердің іргелі жүйелерін өзгертпейді. $x=0$ мәніне келетін болсақ,бұл теңдеудің ерекше нүктесі болып табылады, (1) теңдеуі салыстырмалы түрде үлкен туындыға рұқсат етілгеннен кейін , бұл айқын болады. (Бұл кезде шешімнің болу теоремасы қолданылмайды). Осылайша, жалпы ауыстыру $|x| = e^t$; $x \neq 0$ түрінде болады.

Теорема 2 Эйлер теңдеуінің характеристикалық көпмүшесі келесідей болады:

$$\mathcal{M}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)\dots(\lambda - n + 1) + a_1\lambda(\lambda - 1)\dots(\lambda - n + 2) + \dots + a_{n-1}\lambda + \ + a_n \tag{3.5}$$

Біртекті Эйлер теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = \sum_{s=1}^{n} C_s |x|^{\lambda_s}, \tag{3.6}$$

характеристикалық көпмүшенің барлық түбірлері қарапайым болса

$$y = \sum_{s=1}^{k} \rho_{m_s - 1}(\ln|x|)|x|^{\lambda_s} \tag{3.7}$$

егер $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ түбірлерінің арасында еселілер бар болса,онда еселіктері $m_1,\dots,m_k$ болады. Мұнда ρ_{m_s-1} -ерікті коэффициенттері бар $m_s - 1$ дәрежелі көпмүшелер.

Дәлелденуі (1.13), (1.21) формулаларынан туындайды, себебі $t = \ln|x|$ болғандықтан. Егер (3.5) характеристикалық көпмүшенің түбірлерінің арасында күрделі түбірлер бар болса, онда (3.4) теңдеуіне сәйкес келетін біртекті теңдеудің сериялық шешімі

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \dots, t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \dots, t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

мына түрдегі, бастапқы теңдеулердің шешімдеріне сәйкес келеді

$$|x|^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|), |x|^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|)\ \ln|x|, \dots, |x|^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|)\ \ln|x|^{\ m-1}$$

$$|x|^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|), |x|^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|)\ \ln|x|, \dots, |x|^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|)\ \ln|x|^{\ m-1}$$

Ескерту. Сызықтық біртекті емес (3.1) теңдеуді шешу кезінде (3.4) тұрақты коэффициенттері бар теңдеуді алу үшін ,туындыларды жаңа тәуелсіз айнымалыға қайта есептеудің қажеті жоқ. Төмендегідей әрекет ету оңайырақ: (3.5) характеристикалық көпмүшені жазыңыз, ұқсастарын келтіріңіз және оның түрінен $b_1,...,b_n$ коэффициенттерін табыңыз.

Мысал 22 $x^3y_x''' + xy_x'' - y = xln|x|$

$$\mathcal{M}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + \lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$$

Тәуелсіз айнымалы t теңдеуі келесідей

$$y_t''' - y_t'' + y_t' + (- y) = te^t$$

$$y = \frac{1}{(D-1)^3}te^t = e^t\frac{1}{D^3}t = e^t\frac{t^4}{24} = \frac{1}{24}x(ln|x|)^4$$

Жалпы шешімі

$$y = x[C_1 + C_2ln|x| + C_3(ln|x|)^2 + \frac{1}{24}(ln|x|)^4]$$

4 Қалыпты біртекті жүйелер

Тұрақты коэффициенттері бар қалыпты біртекті жүйені қарастырайық

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4.1)$$

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n$$

немесе векторлық-матрицалық формада

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = A\bar{y}$$

Жүйелерді интегралдаудың негізгі әдісі-алып тастау әдісі. Біз алдымызға таңдалған $y_2, \ldots, y_n$ белгісіз функцияларын дифференциалдау және жою арқылы, y_1 функциясы үшін дифференциалданатын теңдеуін алуды міндет қойдық. (4.1) жүйесінің теңдеулерінің біріншісін дифференциалдаймыз және орнына $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ қоямыз

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a_{11}y_1' + a_{12}y_2' + \ldots + a_{1n}y_n' = a_{11}(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n) + \; + a_{12}(a_{21}y_1 + a_{22}$$
$$y_2 + \ldots + a_{2n}y_n) + \ldots + a_{1n}(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n) = \quad = a_{11}^{(2)}y_1 + a_{12}^{(2)}y_2 + \ldots + a_{1n}^{(2)}y_n$$
(4.2)

(4.2)-ні дифференциалдай отырып және $y_1', \ldots, y_n'$ -ді өрнектердің орнына қоя отырып , біз $\frac{d^3y_1}{dx^3} = a_{11}^{(3)}y_1 + a_{12}^{(3)}y_2 + \ldots + a_{1n}^{(3)}y_n$ теңдеуін аламыз.

Осы амалдарды қайталай отырып, $y_1, \ldots, y_n$ функцияларының тұрақты коэффициенттері бар сызықтық комбинациялары арқылы y_1 функциясының туындылары үшін мына өрнектерді аламыз

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = a_{11}^{(n-1)}y_1 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)}y_n$$

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = a_{11}^{(n)} y_1 + \ldots + a_{1n}^{(n)} y_n$$

$y_2, \ldots, y_n$ функцияларын y_1 функциясымен және оның туындылары арқылы өрнектеу үшін, сызықтық алгебралық жүйені құрастырамыз.

$$a_{12} y_2 \ldots + a_{1n} y_n = \frac{dy_1}{dx} - a_{11} y_1$$

$$a_{12}^{(2)} y_2 + \ldots + a_{1n}^{(2)} y_n = \frac{d^2 y_1}{dx^2} - a_{11}^{(2)} y_1 \qquad (4.3)$$

$$a_{12}^{(n-1)} y_2 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)} y_n = \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} - a_{11}^{(n-1)} y_1$$

Бұл жүйенің шешімі $y_2, \ldots, y_n$ анықтауышына қатысты болады

$$\begin{vmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ a_{12}^{(n-1)} & \ldots & a_{1n}^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (4.4)$$

Егер ол нөлге тең емес болса,онда $y_2, \ldots, y_n$ y_1 арқылы өрнектеледі, және y_1' $, \ldots, y_n^{(n-1)}$ өрнектері тұрақты коэффициенттері бар сызықтық комбинациялар болып табылады. Оларды $\frac{d^n y_1}{dx^n}$ өрнегіне ауыстыра отырып, біз таңдалған y_1 функциясына қатысты тұрақты коэффициенттері бар n -ші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуді аламыз. Егер (4.4) анықтауышы нөлге тең болса, онда оның жолдар арасында сызықтық тәуелділік бар және сызықтық тәуелсіз жолдар саны $n - 1$ -ден аз. Біз l арқылы тәуелсіз бірінші жолдың максималды санын белгілейміз ($l \le n - 2$). Сонда $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \alpha_{l+1}$ $(\alpha_{l+1} \ne 0)$ сандарын бар деп есептеп, (4.1) теңдеулерінің бірінші теңдеуін $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \alpha_{l+1}$-ге көбейтіп, оларды қосу арқылы, сол жақ бөлігін нөл тең деп аламыз. Осылайша, $y_2, \ldots, y_n$ функцияларын алып тастау арқылы, реті $l + 1 \le n - 1$-ге тең y_1 функциясы үшін тұрақты коэффициенттері бар сызықтық дифференциалдық теңдеуді шығады.

Қорытынды. (4.1) сызықты теңдеулер жүйесіне кіретін кез-келген функцияларды жою әдісіне сала отырып, реті жүйе ретінен кіші немесе оған тең

тұрақты коэффициенттері бар сызықтық теңдеу алуға болады.
Жоғарыда келтірілген пайымдаулар бойынша, жойуды еңгізбей-ақ, белгісіз функцияларды келесі түрде іздеуге болады

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, y_2 = = \gamma_2 e^{\lambda x}, \ldots, y_n = \gamma_n e^{\lambda x}$$

немесе векторлық түрде

$$\bar{y} = \bar{\gamma} e^{\lambda x} \tag{4.5}$$

Дәл осы формула арқылы тұрақты коэффициенттері бар сызықтық теңдеулерді шешуге .Сонымен (4.5)- ті (4.1)-ге апарып қоямыз : $\bar{\gamma}\lambda e^{\lambda x} = A\bar{\gamma}e^{\lambda x}$

$$A\bar{\gamma} = \lambda\bar{\gamma}$$

$$(A - \lambda E)\bar{\gamma} = 0 \tag{4.6}$$

Осылайша, $\bar{\gamma}$ векторы A матрицасының меншікті векторы, ал λ саны оның меншікті мәні болып табылады. Сонымен

$$\mathscr{M}(\lambda) = A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

$$\Delta(\lambda) = det\mathscr{M}(\lambda)$$

Матрица $\mathscr{M}(\lambda)$ характеристикалық деп аталады. Оның анықтауышы $\Delta(\lambda)$ характеристикалық анықтауыш, ал $\Delta(\lambda) = 0$ теңдеуі характеристикалық теңдеу деп аталады. Анықтауыш $\Delta(\lambda)$ n-дәрежелі көпмүшелік және меншікті мәні болып табылады,яғни (4.6) жүйелерінің тривиальды емес шешімі бар болатын жағдайда, λ мәндері оның түбірі болып табылатындығы, тікелей көрінеді. λ_s- $\Delta(\lambda)$ түбірі болатын болса, онда көпмүшелік Тейлор формуласы бойынша төмендегідей жіктелетін болады

$$\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda_s) + \frac{(\lambda - \lambda_s)}{1!}\Delta'(\lambda_s) + \frac{(\lambda - \lambda_s)^2}{2!}\Delta''(\lambda_s) + \ldots + \frac{(\lambda - \lambda_s)^n}{n!}\Delta^{(n)}(\lambda_s)$$

(4.8)

(4.1) жүйесінің шешімдері, характеристикалық көпмүшенің түбірі қандай екеніне байланысты: қарапайым немесе еселік. Характеристикалық көпмүшенің барлық түбірлері қарапайым болатын жағдайды қарастырайық.

Теорема 3 Характеристикалық $\lambda_1,...,\lambda_n$ көпмүшесінің барлық түбірлері қарапайым, ал $\bar{\gamma}_1,...,\bar{\gamma}_n$ оларға сәйкес келетін A матрицасының меншікті векторлары болсын. Онда (4.1) жүйесінің жалпы шешімі төмендегідей болады

$$\bar{y} = C_1\bar{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x} + ... + C_n\bar{\gamma}_n e^{\lambda_n x} \qquad (4.9)$$

Егер λ_s қарапайым түбір болса, онда (4.8)-ден тікелей $\Delta(\lambda_s) = 0$ шығады. Анықтауыштарды дифференциалдау ережесіне сәйкес

$$\Delta'(\lambda_s) = -\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} - -\begin{vmatrix} a_{12}-\lambda & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n3} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & ... & ... & a_{1n-1} \\ a_{21} & ... & ... & a_{2n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-11} & ... & ... & a_{n-1\,n-1}-\lambda \end{vmatrix} \qquad (4.10)$$

$\Delta'(\lambda_s) \neq 0$ шарты "$n-1$"-ші ретті $\mathcal{M}(\lambda)$ матрицасының диагональды минорларының ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше екенін,сонымен қатар $rang\mathcal{M}(\lambda_s) = n-1$ екенін білдіреді.Сондықтан $\bar{\gamma}_s$ меншікті векторының компоненттері сызықтық жүйеден анықталады.

$$(a_{11}-\lambda_s)\gamma_{1s} + a_{12}\gamma_{2s} + ... + a_{1n}\gamma_{ns} = 0$$

$$......................$$

(4.11)

$$a_{n1}\gamma_{1s} + a_{n2}\gamma_{2s} + ... + (a_{nn}-\lambda_s)\gamma_{ns}$$

еркті көбейткішке дейінгі дәлдікпен.

Нөлге тең анықтауыштың кез келген жолының алгебралық толықтауыштары алгебралық жүйенің шешімдері екенін көрсету қиын емес.

$$\sum_{m=1}^{n} a_{km}x_m = 0\ , \quad \Delta = det|a_{km}| = 0$$

Шынында да, x_m орнына, мысалы бірінші жолдың алгебралық толықтыруларын қойған кезде , біз $\sum_{m=1}^{n} a_{1m}A_{1m} = \Delta = 0$ аламыз.

$x_m = A_{1m}$ ауыстыру кезінде, қалған теңдеулерді аламыз

$$\sum_{m=1}^{n} a_{km}A_{1m} = 0 \qquad k = 2,\ldots,m$$

$rang\mathcal{M}(\lambda_s) = n - 1$ болғандықтан, барлық алгебралық толықтауыштар нөлге тең емес $\mathcal{M}(\lambda_s)$ матрицасының кем дегенде бір жолы бар. Бұл жолдың алгебралық толықтауыштарын $\bar{\gamma}_s$ векторының компоненті ретінде алуға болады.

Осылайша біз шешім жүйесін аламыз

$$\bar{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x},\ldots,\bar{\gamma}_n e^{\lambda_n x} \tag{4.12}$$

оның нақты екенін көрсетейік,

$$\alpha_1\bar{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + \alpha_n\bar{\gamma}_n e^{\lambda_n x} = 0 \tag{4.13}$$

теңдіктегі барлық α_s нөлге тең болғанда ғана мүмкін болады. $e^{\lambda_s x}$ функциялары тәуелсіз болғандықтан, онда (4.13) – тен $\alpha_1\bar{\gamma}_1 = 0,\ldots,\alpha_n\bar{\gamma}_n = 0$ шығады. Меншікті векторлар $\bar{\gamma}_s \neq 0$ болғандықтан , онда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Теореманы дәлелдеу.Егер түбірлер арасында комплекс түбірлер болса, ал есептің шарттары нақты формадағы іргелі жүйені алуды қажет етсе, онда n -ші ретті бір теңдеу үшін орындалғанындай әрекет етеміз.

Характеристикалық көпмүшенің бір түбірі $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ түрінде болсын.Онда түйіндес түбір $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ түрінде болады. Меншікті векторлардың компоненті ретінде анықтауыштардың бірдей жолының $\Delta(\alpha + i\beta)$ және $\Delta(\alpha - i\beta)$ алгебралық толықтауыштарын аламыз.(жол барлық алгебралық толықтауыштар нөлге тең болмайтындай етіп таңдалады). Бұл жағдайда векторлар түйіндес болады, ал (4.1) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің сәйкес комплекс шешімдері келесідей болады:

$$\bar{\varphi}_1(x) = \bar{\gamma}e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad \bar{\varphi}_2(x) = \bar{\gamma}e^{(\alpha - i\beta)x}$$

Нақты шешімдер өзгертілмеген түрлендіру арқылы алынады және сызықтық тәуелсіз болып қалады.

$$\bar{\psi}_1(x) = \frac{\bar{\varphi}_1(x) + \bar{\varphi}_2(x)}{2} \;;\; \bar{\psi}_1(x) = \frac{\bar{\varphi}_1(x) - \bar{\varphi}_2(x)}{2i}$$

Мысал 23 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -6x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 4y \end{cases}$; $\Delta = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 1 \\ -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 10\lambda + 26$

$$\lambda_1 = -5 + i \,;\, \lambda_2 = -5 - i$$

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} = 0; \bar{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} = 0; \bar{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\bar{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{21}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(-5+i)t} \\ (1+i)e^{(-5+i)t} \end{pmatrix};$$

$$\bar{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(-5-i)t} \\ (1-i)e^{(-5-i)t} \end{pmatrix} ;$$

$$\bar{\psi}_1(t) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(t) \\ \psi_{21}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-5t}\cos t \\ e^{-5t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} ;$$

$$\bar{\psi}_2(t) = \begin{pmatrix} \psi_{12}(t) \\ \psi_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-5t}\sin t \\ e^{-5t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} ;$$

Скалярлық жазбадағы жалпы шешім төмендегідей болады

$$x = e^{-5t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

$y = e^{-5t}[C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t - \sin t)] - e^{-5t}[(C_1 + C_2)\cos t + +(C_2 - C_1)$ $\sin t]$

Характеристикалық көпмүшенің түбірлерінің арасында еселі түбірлер бар болған жағдайға көшейік. λ_1, m_1 еселігінің түбірі болсын. (4.8)-ден $\Delta(\lambda_1) = \Delta'(\lambda_1) = \ldots = \Delta^{(m_1-1)}(\lambda_1)$, $\Delta^{(m_1)}(\lambda_1) \neq 0$ болатыны шығады. $\Delta(\lambda)$-ні $''m''$ рет дифференциалдау арқылы $\Delta^{(m_1)}(\lambda_1)$, $n - m_1$ ретті $\mathcal{M}(\lambda_1)$ диагональды минорларының алгебралық қосындысы екенін түсіну оңай. $\Delta^{(m_1)}(\lambda_1) \neq 0$ болғандықтан, онда бұл минорлардың арасында нөлге тең емес кем дегенде біреуі болуы керек, сондықтан $\mathcal{M}(\lambda_1)$ (оны r_1деп белгілейміз) матрицасының рангі $n - m_1$-ден кем емес.

$$r_1 \geq n - m_1$$

λ_1 меншікті мәнінің бір еселігіне сәйкес келетін, А матрицасының $\bar{\gamma}_1^{(\cdot)}, \ldots, \bar{\gamma}_{n-r_1}^{(\cdot)}$ сызықтық тәуелсіз меншікті векторларының $n - r_1$ бар екенін көрсетейік.

n сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінде

$$(a_{11} - \lambda_1)\gamma_1^{(\cdot)} + a_{12}\gamma_2^{(\cdot)} + \ldots + a_{1n}\gamma_n^{(\cdot)} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4.14)$$

$$a_{n1}\gamma_1^{(\cdot)} + a_{n2}\gamma_2^{(\cdot)} + \ldots + (a_{nn} - \lambda_1)\gamma_n^{(\cdot)}$$

тек r_1 тәуелсіз, ал қалған $n - r_1$ салдары болып табылады. Бұл $n - r_1$ белгісіз γ ерікті болуы мүмкін дегенді білдіреді.
Біз оларға бірінші нөмірлерді береміз.

$$\gamma_1^{(\cdot)} = C_1, \gamma_2^{(\cdot)} = C_2, \ldots, \gamma_{n-r_1}^{(\cdot)} = C_{n-r_1}$$

Қалған белгісіздер $C_1, \ldots, C_{n-r_1}$ арқылы сызықтық түрде көрсетіледі

$$\gamma_s^{(\cdot)} = \sum_{k=1}^{n-r_1} \delta_{sk} C_k; \quad s = n - r_1 + 1, \ldots, n$$

Ерікті тұрақтылардың бірін кезекпен 1-ге, қалғандарын нөлге тең деп есептей отырып, A матрицасының меншікті векторларының $n - r_1$ аламыз.

$$\bar{\gamma}_1^{(\,)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_{n-r_1+1\,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_{n\,1} \end{pmatrix};\ \bar{\gamma}_2^{(\,)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_{n-r_1+1\,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_{n\,2} \end{pmatrix};\ \ldots;\bar{\gamma}_{n-r_1}^{(\,)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_{n-r_1+1\,n-r_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_{n\,n-r_1} \end{pmatrix}$$

$\bar{\gamma}_1^{(\,)},\ldots,\bar{\gamma}_{n-r_1}^{(\,)}$ векторларының сызықтық тәуелсіз екендігіне көз жеткіземіз. Векторлық теңдікті жазайық

$$\alpha_1\bar{\gamma}_1^{(\,)} + \ldots + \alpha_{n-r_1}\bar{\gamma}_{n-r_1}^{(\,)} = 0 \tag{4.15}$$

алғашқы $n - r_1$ компонент.

Біз аламыз:
$\alpha_1 + \alpha_2 0 + \ldots + \alpha_{n-r_1} 0 = 0$,…, $\alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \ldots + \alpha_{n-r_1} 1 = 0$

Демек, (4.15) теңдігі $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-r_1} = 0$ болған жағдайда ғана мүмкін болады.

Теорема 8 r_s – $\mathcal{M}(\lambda_s)$ матрицасының рангі болсын, мұндағы λ_s – характеристикалық көпмүшеліктің m_s еселігінің түбірі. Онда оған

$$\bar{\gamma}_1^{(s)} e^{\lambda_s x},\ldots,\bar{\gamma}_{n-r_1}^{(s)} e^{\lambda_s x} \tag{4.16}$$

түріндегі дифференциалдық теңдеулер жүйесінің сызықтық тәуелсіз шешімдеріне $n - r_1$ сәйкес келеді.

$s = 1,\ldots,k$ кезіндегі (4.16) түріндегі шешімдер жиынының сызықтық тәуелсіздігі бекітілген s кезіндегі $\bar{\gamma}_j^{(s)}$ векторларының және әртүрлі λ_s кезіндегі $e^{\lambda_s x}$ функциясының сызықтық тәуелсіздігінен шығады. Шешімдердің іргелі жүйесін алу үшін, λ_s түбіріне сәйкес келетін сызықтық тәуелсіз шешімдердің саны оның еселігіне тең болуы керек.
Екі жағдайды ажырату керек.

1. $\mathcal{M}(\lambda_s)$ матрицасының рангі ең кіші мәнге ие

$$r_s = n - m_s \qquad (4.17)$$

Бұл жағдайда (4.16) түріндегі сызықтық тәуелсіз шешімдердің саны дәл k= $n - r_s$ $= m_s$ түбірдің еселігіне тең.

Егер (4.17) қатынасы барлық еселік түбірлер үшін орындалса, онда (4.1) жүйенің жалпы шешімі жай түбірлердегідей (4.9) түрге ие болады.

2. матрицалық ранг $\mathcal{M}(\lambda_s)$ $r_s > n - m_s$

Бұл жағдайды толық талдау үшін қарапайым курстар бағдарламасына енбеген сызықтық алгебра аппараты берілуі керек. Сондықтан біз шешімді анықталмаған коэффициенттер тәсілімен олардың ең аз санымен табуға мүмкіндік беретін практикалық әдістемені ұсынумен шектелеміз.

Теорема 2 - ден көрініп тұрғандай, характеристикалық теңдеудің түбірлерінің еселігі жағдайында y_1 функциясы үшін тұрақты коэффициенттері бар теңдеу қалыпты жүйеден $y_2,\dots,y_n$-ді алып тастағанда ,(4.1)

$$y_1 = e^{\lambda_s x}, xe^{\lambda_s x}, \dots, x^p e^{\lambda_s x} \qquad (4.18)$$

түрінің дербес шешімдері болады.

y_1 үшін теңдеудің реті n-нен аз болуы мүмкін болғандықтан,онда (4.18) шешімдер саны (4.7) көпмүшесінің түбірінің еселігінен де аз болуы мүмкін екенін ескеріңіз. (4.18) кезекті шешімдерінің әрқайсысының x дәрежесі алдыңғысынан бірлікке үлкен болғандықтан, онда $p \le m_s - 1$ болады. $y_2,\dots,y_n$ функциялары y_1 функциясымен (4.3) жүйесі бойынша байланысқан, оның оң жақ бөліктері y_1 функциясын және оның туындыларын қамтиды.

Сондықтан, $y_1 = x^j e^{\lambda_s x}$ дербес шешімі $y_2 = \rho_{2j}^{(s)} e^{\lambda_s x}, \dots, y_n = \rho_{nj}^{(s)} e^{\lambda_s x}$ функцияларына сәйкес келеді. Мұндағы, $\rho_{2j}^{(s)}, \dots, \rho_{nj}^{(s)}$ дәрежелері j-ден жоғары емес көпмүшелер. (4.4) анықтауышының тәуелсіз бірінші жолдарының l максималды саны $n - 1$ -ден аз болуы мүмкін , y_1 және оның туындылары арқылы $y_2,\dots,y_n$ анықтау жүйесі анықталмаған болады.Онда $y_1 = e^{\lambda_s x} x^j$ функциясы көрсетілген түрдің бірнеше сызықты тәуелсіз шешімдеріне сәйкес келуі мүмкін.

Қорытынды. Егер (4.7) характеристикалық көпмүшесінің λ_s еселік түбірі бар болса,(4.1) қалыпты жүйесі (4.16) түріндегі шешімдерден басқа, келесі түрдегі шешімге ие болады:

$$\bar{\rho}_1^{(s)}(x)e^{\lambda_s x},...,\bar{\rho}_p^{(s)}(x)e^{\lambda_s x} \tag{4.19}$$

Мұнда $\bar{\rho}_1^{(s)}(x)$ векторы бірінші дәрежелі көпмүше $\bar{\rho}_p^{(s)}(x)$ векторы p дәрежелі көпмүше. Жоғарыда айтылғандардан осы көпмүшеліктердің арасында 1-ден p -ге дейінгі барлық дәрежелі көпмүшелік бар екендігі шығады, сонымен қатар, кейбір көпмүшеліктер бірдей дәрежеде болуы мүмкін. λ_s-ке сәйкес келетін сызықтық тәуелсіз шешімдердің (4.16) және (4.19) жалпы саны m_s-ке тең болуы керек

$$n - r_s + p \le m_s \text{ немесе } p \le m_s + r_s - n \tag{4.20}$$

p нақты мәнін анықтау үшін, атап өткендей, басқа тәсіл қажет. Жүргізілген талдау келесі практикалық тәсілді қолдануға негіз береді.
$r_s > n - m_s$ болған жағдайда (1) жүйенің шешімін

$$\bar{y} = \bar{\rho}_{m_s + r_s - n}(x)e^{\lambda_s x} \tag{4.21}$$

түрінде іздеу керек. Мұндағы $\bar{\rho}_{m_s + r_s - n}(x)$ –анықталмаған коэффиценттері бар вектор көпмүшелік. (4.21) жүйесін (4.1) жүйесіне қойып, $\bar{\rho}_{m_s + r_s - n}(x)$ көпмүшесінің $n(m_s - n + r_s + 1)$ коэффициенттерін анықтаудың сызықтық алгебралық жүйесін аламыз. λ_s түбірі m_s сызықты тәуелсіз шешімдеріне сәйкес келуі керек болғандықтан, онда m_s коэффициенттері ерікті болады, ал қалғандары олар арқылы өрнектеледі.
$r_s \le n - 1$ болғандықтан, $m_s + r_s - n \le m_s - 1$ екенін ескеріңіз.

Сондықтан, шешім

$$\bar{y} = \bar{\rho}_{m_s - 1}(x)e^{\lambda_s x} \tag{4.22}$$

түрінде ізделетін болса, ұсынылған әдіс әдеттегіден аз күш жұмсауды қажет етеді. Жүргізілген талдау $\mathcal{M}(\lambda_s)$ матрицасының рангі максималды мәнге ие болған жағдайда ғана, яғни $n - 1$ -ге тең болғанда (4.22) шешімінің бар болатынын көрсетеді.

Атап айтқандай, бұл n-ші ретті б (1.1) теңдеуіне эквивалентті қалыпты жүйе үшін орын алады.

Әдеттегі ауыстыру $y' = y_1, y'' = y_2, \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1}$.

Бұл теңдеу қалыпты жүйеге әкеледі

$y' = y_1$

$y_1' = y_2$

$$\mathcal{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad (4.23)$$

…

$y_{n-2}' = y_{n-1}$

$y_{n-1} = -a_n y - a_{n-1} y_1 - \ldots - a_1 y_{n-1}$

a_{n1} элементіне сәйкес келетін $\mathcal{M}(\lambda)$ матрицасының миноры келесідей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Осылайша, кез келген $a_1, \ldots, a_n$ $rang\ \mathcal{M}(\lambda_s) = n - 1$ кезінде және (1.21) формуласына толық сәйкес (4.23) жүйенің шешімі (4.22) түрінде болады.

Егер характеристикалық теңдеудің λ_s түбірінің кем дегенде бір еселігі үшін $r_s < n - 1$ болса, онда (4.1) қалыпты сызықтық жүйені $y_1, \ldots, y_n$ функциясындағы кез-келгеніне қатысты n -ретті бір теңдеуге келтіруге болмайды. Бұл жағдайда басқаларын алып тастағаннан кейін функциялардың кез келгені үшін алынған дифференциалдық теңдеулердің реті n -нен қатаң түрде аз болады.

Біз көрсетілген әдісті 3-ші ретті жүйенің мысалдарымен суреттейміз.

Мысал 24

$\frac{dx}{dt} = 3x - y - z$

$$\frac{dy}{dt} = x + y - z \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\frac{dz}{dt} = x - y + z$$

Характеристикалық теңдеудің түбірлері: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$\lambda_1 = 1$ меншікті мәнге жататын $\bar{\gamma}_1$ меншікті векторының компонентін анықтау үшін $\mathcal{M}(1) = 0$ немесе $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} = 0$ жүйесін аламыз.

$\bar{\gamma}_1$ векторының компоненті ретінде $\mathcal{M}(1)$ бірінші жолдың қарама-қарсы таңбалы алгебралық толықтауыштарын аламыз.

$$\gamma_{11} = 1, \gamma_{21} = 1, \gamma_{31} = 1$$

Осылайша, қарапайым түбірге сәйкес келетін шешім

$\bar{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ түрінде болады.

Матрицаның рангін анықтайық $\mathcal{M}(\lambda_2) = \mathcal{M}(2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; r = 1$

Жүйенің реті $n = 3$. Түбір еселігі $m = 2$. Демек, $r = n - m$ рангі ең кіші мәнге ие және $\lambda = 2$ меншікті мәніне 2 сызықтық тәуелсіз меншікті $\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$ векторлары тиесілі. $\mathcal{M}(2)\bar{\gamma} = 0$ жүйесінде бір ғана тәуелсіз теңдеу болады $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0$

$\gamma_2 = C_2, \gamma_3 = C_3$ екеніне сене отырып, $\gamma_1 = C_2 + C_3$ аламыз, осыдын

$$x = (C_2 + C_3)e^{2t};$$

$$y = C_2 e^{2t};$$

$$z = C_3 e^{2t};$$

$\bar{\gamma}_1 = \{1,1,0\}$ $(C_2 = 1, C_3 = 0)$ және $\bar{\gamma}_2 = \{1,0,1\}$ $(C_2 = 0, C_3 = 1)$ векторларына сәйкес келетін сызықтық тәуелсіз шешімдер келесідей:

$$\bar{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \bar{\varphi}_3(t) = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$C_1\bar{\varphi}_1(t) + C_2\bar{\varphi}_2(t) + C_3\bar{\varphi}_3(t)$ жүйесінің жалпы шешімін скаляр түрінде жазайық

$$x = C_1 e^t + (C_2 + C_3) e^t;$$
$$y = C_1 e^t + C_2 e^t;$$
$$z = C_1 e^t + C_3 e^t.$$

Матрицаның екінші еселікте меншікті мәні бар, бірақ бір меншікті векторы жататын үшінші ретті жүйені қарастырыңыз.

Мысал 25

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y + z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y - z \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}; \; \mathscr{M}(2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dz}{dt} = -y + 3z \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 2; \; \lambda_3 = 3, \; rang\,\mathscr{M}(2) = 2 \quad r > n - m$$

$\bar{\rho}(t)$ көпмүшесінің $r + m - n = 1$ дәрежесі бар. Осыған сәйкес шешімді мына түрде іздейміз

$$x = (a_1 + b_1 t) e^{2t}$$

$$y = (a_2 + b_2 t) e^{2t}$$

$$z = (a_3 + b_3 t) e^{2t}$$

Осы өрнектерді est-ға қысқартқаннан кейін дифференциалдық теңдеулер жүйесіне ауыстырып, бос мүшелер мен коэффициенттерді t-ге теңестіру арқылы, біз белгісіздер үшін алты сызықтық біртекті теңдеулер жүйесін аламыз $(a_i, b_i; i = 1,2,3)$

$b_1 + a_2 - a_3 = 0;$ $\qquad -b_2 + b_3 = 0$

$b_2 - a_1 + a_3 = 0;$ $\qquad b_1 - b_3 = 0$

$b_3 + a_2 - a_3 = 0;$ $\qquad -b_2 + b_3 = 0$

Осы теңдеулердің ішінен тәуелсіз тек 4-еуі болады, сондықтан екі коэффициент, мысалы, $a_1 = C_1, b_1 = C_2$ ерікті болуы мүмкін, ал қалғандары олар арқылы көрсетіледі.

$$b_2 = b_3 = b_1 = C_1; \; a_3 = a_1 - b_2 = C_1 - C_2, \; a_2 = a_3 - b_1 = C_1 - 2C_2$$

Осыдан шығатын

$x = (C_1 + C_2 t) e^{2t}$;

$$y = (C_1 - 2C_2 + C_2 t)e^{2t}\;; \qquad \bar{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}; \quad \bar{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ (-2+t)e^{2t} \\ (-1+t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$y = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^{2t}\;;$$

$\lambda_3 = 3$ түбіріне сәйкес келетін шешім алдыңғы мысалдағыдай.

Жалпы шешім келесідей

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{2t} + C_3 e^{3t}\;;$$

$$y = (C_1 - 2C_2 + C_2 t)e^{2t}\;; \qquad \bar{\varphi}_3(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix};$$

$$y = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^{2t} + C_3 e^{3t}\;;$$

Келесі мысалдарда үш дүркін түбірге ие, үшінші ретті жүйелерді қарастырылады.

Мысал 26

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2z \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}; \quad \mathcal{M}(2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dz}{dt} = -x + y + 3z \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2\;; \quad r = 1 \quad r + m - n = 1$$

$\bar{\rho}(t)$ көпмүшесі 1 дәрежеге ие.

Шешім 23-мысалдың түріне ұқсас түрде ізделінеді, бірақ түбірдің еселігі үш-ке тең болғандықтан, a_1, b_1коэффициенттері үшін теңдеулердің 6 жүйесіндегі, теңдеу тек солай тәуелсіз болады және үш коэффициент ерікті болады.

Ауыстырудан және кейбір жеңілдетулерден кейін біз аламыз:

$$b_1 = a_1 - a_2 - a_3; \qquad b_1 - b_2 - b_3 = 0;$$

$$b_2 = 2(a_1 - a_2 - a_3); \qquad 2(b_1 - b_2 - b_3) = 0;$$

$$b_3 = -(a_1 - a_2 - a_3); \qquad -(b_1 - b_2 - b_3) = 0;$$

$a_1 = C_1, a_2 = C_2, b_1 = C_3$ белгілейміз; $a_3 = C_1 - C_3 - C_2$; $b_2 = 2C_3$; $b_3 = -C_3$ табамыз.

Жалпы шешім мен іргелі жүйе келесідей:

$$x = (C_1 + C_3 t)e^{2t}\;;$$

$y = (C_2 + 2C_3 t)e^{2t}$; $\quad \bar{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}; \quad \bar{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix};$

$y = (C_1 - C_2 - C_3 - C_3 t)e^{2t}$;

$$\bar{\varphi}_3(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ 2te^{2t} \\ -(1+t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Мысал 27

$\frac{dx}{dt} = 5x - y$

$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y - z \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}; \; \mathcal{M}(3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\frac{dz}{dt} = x + 2z \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$; $r = 2 \quad r + m - n = 2$

Шешім келесідей ізделеді

$$x = (a_1 + b_1 t + l_1 t^2)e^{3t};$$

$$y = (a_2 + b_2 t + l_2 t^2)e^{3t};$$

$$z = (a_3 + b_3 t + l_3 t^2)e^{3t};$$

Тоғыз коэффициентті ауыстырғаннан кейін біз тоғыз сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз, және де бос коэффициенттер саны түбірдің еселігіне тең болуы керек, яғни үшке тең. Жеңілдету арқылы мына мәндерге ие боламыз

$b_1 = 2a_1 - a_2;\qquad 2l_1 = 2b_1 - b_2;\qquad 2l_1 - l_2 = 0;$

$b_2 = 3a_1 - a_2 - a_3;\qquad 2l_2 = 3b_1 - b_2 - b_3;\qquad 3l_1 - l_2 - l_3 = 0;$

$b_3 = a_1 - a_3;\qquad 2l_3 = b_1 - b_3;\qquad l_1 - l_3 = 0;$

$a_1 = C_1; b_1 = C_2; l_1 = C_3$ деп белгілейміз, $l_2 = 2l_1 = 2C_2$; $l_3 = l_1 = C_3$;

$a_2 = 2a_1 - b_1 = 2C_1 - C_2$; $b_2 = 2b_1 - 2l_1 = 2C_2 - 2C_3$;

$b_3 = b_1 - 2l_3 = C_2 - \; - 2C_3;$

$a_3 = a_1 - b_3 = C_1 - C_2 + 2C_3$ табамыз.

Жалпы шешім мен іргелі жүйе келесідей:

$x = [C_1 + C_2 t + C_3 t^2]e^{3t};$

$y = [2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3 t^2]e^{3t};$

$z = [C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_1 - 2C_3)t + C_3 t^2]e^{3t};$

$$\bar{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}; \quad \bar{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} te^{3t} \\ (-1 + 2t)e^{3t} \\ (-1 + t)e^{3t} \end{pmatrix}; \quad \bar{\varphi}_3(t) = \begin{pmatrix} t^2 e^{3t} \\ (-2t + 2t^2)e^{3t} \\ (2 - 2t + t^2)e^{3t} \end{pmatrix}$$

4.1 Алып тастау әдісі

Алып тастау әдісі жалпы және қалыпты түрдегі, тұрақты коэффициенттері бар біртекті емес сызықтық теңдеулер жүйесін шешудің негізгі әдісі болып табылады.

Бұл ерікті тұрақтыларды вариациялау әдісі арқылы қалыпты біртекті емес жүйенің дербес шешімін іздеу, көбінесе операторлық әдіс кезінде қолданылатын алып тастау әдісіне қарағанда күрделі есептеулерді қажет ететіндігімен түсіндіріледі.

n белгісіз функциялары бар әрқайсысының ерікті реті бар, n теңдеулер жүйесін қарастырамыз. D операторының көмегімен оны келесідей төмендегідей болады:

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_{11}(D)y_1 + \dots + \mathcal{M}_{1n}(D)y_n = f_1(x); \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mathcal{M}_{n1}(D)y_1 + \dots + \mathcal{M}_{nn}(D)y_n = f_n(x); \end{aligned} \tag{4.24}$$

Мұнда $\mathcal{M}_{sk}(D)$ еркін дәрежелі операторлық көпмүшелер. Болашақта $f_1, \dots, f_n$ функциялары жеткілікті сан рет дифференциалданады деп болжанады.Бұл сөйлемде $y_1, \dots, y_n$ жеткілікті тегіс шешімдердің бар екендігін дәлелдеуге болады. Біздің баяндамамызда $y_1, \dots, y_n$ дифференциалдау мүмкіндігінің дәлелі сан рет қажетті деп ұйғарылады. $\mathcal{M}_{sk}(D)$ операторлық көпмүшеліктермен бірдей коэффициенттері бар, элементтері кәдімгі $\mathcal{M}_{sk}(\lambda)$ көпмүшелер болатын матрицаны қарастырамыз.

Белгілейміз:

$$\mathcal{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11}(\lambda) & \dots & \mathcal{M}_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{M}_{n1}(\lambda) & \dots & \mathcal{M}_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (4.25)$$

$$\Delta\,(\lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{M}_{11}(\lambda) & \dots & \mathcal{M}_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{M}_{n1}(\lambda) & \dots & \mathcal{M}_{nn}(\lambda) \end{vmatrix} \qquad (4.26)$$

m арқылы $\Delta\,(\lambda)$ көпмүшесінің дәрежесін белгілейміз. (4.24) жүйесінің шешіміне m ерікті тұрақтылар кіреді екен, сондықтан m саны (4.25) жүйесінің реті деп аталады. (4.26) анықтауыштың $\mathcal{M}_{sk}(\lambda)$ элементінің алгебралық толықтауышын $\mathcal{N}_{sk}(\lambda)$ арқылы белгілейміз.

(4.24) жүйесіндегі барлық $y_2,\dots,y_n$ функцияларын жою үшін және y_1 теңдеуін алу үшін біз алгебрада қолданылатын әдіске ұқсас әдісті қолданамыз. Бірінші теңдеуге $\mathcal{N}_{11}(D)$ операторы, екіншіге $\mathcal{N}_{21}(D)$,..., соңғысына $\mathcal{N}_{n1}(D)$, арқылы әрекет етіп, нәтижелерің қосамыз.

$$\sum_{s=1}^{n}\mathcal{N}_{s1}(D)\mathcal{M}_{s1}(D) = \Delta\,(D);\ \sum_{s=1}^{n}\mathcal{N}_{s1}(D)\mathcal{M}_{sk}(D) = 0;\ k = 2,\dots,n$$

болғандықтан, онда нәтижесінде y_1үшін тұрақты коэффициенттері бар сызықтық біртекті емес теңдеу аламыз:

$$\Delta\,(D)y_1 = \mathcal{N}_{11}(D)f_1(x) + \dots + \mathcal{N}_{n1}(D)f_n(x) \qquad (4.27_1)$$

Келесі бағандардың алгебралық толықтыруларымен дәйекті түрде әрекет ете отырып, біз теңдеуді аламыз:

$$\Delta\,(D)y_2 = \mathcal{N}_{12}(D)f_1(x) + \dots + \mathcal{N}_{n2}(D)f_n(x) \qquad (4.27_2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta\,(D)y_n = \mathcal{N}_{1n}(D)f_1(x) + \dots + \mathcal{N}_{nn}(D)f_n(x) \qquad (4.27_n)$$

Егер $\Delta(D)$ нөлге тең болмаса, онда $y_1,...,y_n$ анықтау үшін сол жақ бөлігі бірдей теңдеулер аламыз, сондықтан белгісіз функцияның әрқайсысы үшін біртекті теңдеудің жалпы шешімінің құрылымы бірдей болады. $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_m(x)$ біртекті $\Delta(D)y = 0$ теңдеуінің шешімдерінің іргелі жүйесі, ал $\psi_1(x),...,\psi_n(x)$ $(4.27_1),...,(4.27_n)$ теңдеулерінің дербесшешімдері болсын.Онда осы теңдеулердің әрқайсысының жалпы шешімі мына түрге ие болады

$$y_1 = C_1^{(')}\varphi_1(x) + ... + C_m^{(')}\varphi_m(x) + \psi_1(x) \qquad (4.28_1)$$

$$y_2 = C_1^{('')}\varphi_1(x) + ... + C_m^{('')}\varphi_m(x) + \psi_2(x) \qquad (4.28_2)$$

$$y_n = C_1^{(n)}\varphi_1(x) + ... + C_m^{(n)}\varphi_m(x) + \psi_n(x) \qquad (4.28_n)$$

Алайда $(4.27_1),...,(4.27_n)$ теңдеулері бірдей (4.24) жүйеден алынған, және олардың $(4.28_1),...,(4.28_n)$ шешімдерін бір-бірінен оқшаулап қарастыруға болмайды. Бұл өз көрінісін n m еркікті тұрақтылар арасында тәуелділік бар екендігінде табады. Олардың арасында байланыс орнату үшін (4.28) функцияларын (4.24) жүйесіне қойып, тепе-теңдік болу үшін талап ету керек. n m қабылдау жүйесінде сызықтық алгебралық теңдеулер еркін $C_i^{(k)}$ үшін $"m"$ ерікті тұрақтылар болып қалады, ал қалғандары олар арқылы көрсетіледі.

Бұл өрнектерді (4.48) формулаларға ауыстырып қою арқылы, біз $"m"$ ерікті тұрақтыларға тәуелді, (4.24) жүйенің жалпы шешімін аламыз.

Егер де $\Delta(D) = 0$ болса, онда жүйе үйлесімсіз, немесе оның шешімі бір немесе бірнеше ерікті функцияларға байланысты болады. Соңғысы (4.24) жүйенің бір немесе бірнеше теңдеулері қалғандарынан санға көбейту, қосу және дифференциалдау операциясы арқылы алынған жағдайда мүмкін болады.

Ескерту. Қалыпты жүйені жою әдісімен шешкен кезде, (4.27) түріндегі теңдеулердің бірін интегралдағаннан кейін, жаңа еркікті тұрақтыларды енгізбей, жүйеден қалған белгісіз функцияларды табу.

Мысал 28

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 18te^t;$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y.$$

Жүйені оператор түрінде жазамыз:

$$(D-3)x - 2y = 18te^t;$$

$$-x + (D-2)y = 0.$$

Бірінші теңдеудегі оң жақ бөлігінің түрін қиындатпас үшін,y алынып тасталатын болса, екінші теңдеуді $D-3$ операторына көбейту арқылы x алынып тасталады.

$$
\begin{array}{l}
(D-3)x - 2y = 18te^{t}; \\
-\,-(D-3)x + (D-3)(D-2)y = 0 \\
\hline
(D^2 - 5D + 4)y = 18te^{t};
\end{array}
$$

$$y = \frac{1}{(D-1)(D-4)}18te^{t} = e^{t}\frac{1}{D(D-5)}18t = -e^{t}(\frac{6}{D} + 2)t = -e^{t}(3t^2 + 2t)$$

Теңдеудің жалпы шешімі : $y = C_1e^{4t} + C_2e^{t} - e^{t}(3t^2 + 2t)$

Жүйенің екінші теңдеуінен біз табамыз:

$$x = \frac{dy}{dt} - 2y = 4C_1e^{4t} + C_2e^{t} - e^{t}(3t^2 + 8t + 2) - 2C_1e^{4t} + e^{t}(6t^2 + 4t) = = 2C_1e^{4t} - C_2e^{t} + e^{t}(3t^2 - 4t - 2)$$

Жауабы:

$$x = 2C_1e^{4t} + e^{t}(-C_2 + 3t^2 - 4t - 2)$$

$$y = C_1e^{4t} + e^{t}(C_2 - 3t^2 - 2)$$

Мысал 29 Екінші мысал ретінде жалпы көрініс жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 6e^{t} \\ 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 18e^{t} \end{cases}$$

$$(D^2 + 5D)x + (2D + 1)y = 6e^{t}$$

$$(3D^2 + 5)x + (D + 3)y = 18e^{t}$$

$$\Delta\,(D) = (D^2 + 5D)(D + 3) - (3D^2 + 5)(2D + 1) = -5(D-1)^2(D+1)$$

x және y үшін теңдеулер келесідей

$$-5(D-1)^2(D+1)x = (D+3)6e^{t} - (2D+1)18e^{t}$$

$$-5(D-1)^2(D+1)y = -(3D^2 + 5)6e^{t} + (D^2 + 5D)18e^{t}$$

немесе

$$(D-1)^2(D+1)x = 6e^{t}$$

$$(D-1)^2(D+1)x = -18e^{t}$$

Біртекті емес теңдеулердің дербес шешімдерін табамыз:

$$x = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)}6e^{t} = e^{t}\frac{1}{D^2(D+2)}6 = e^{t}\frac{t^2}{2}$$

$$y = -\frac{1}{(D-1)^2(D+1)} 18e^t = -t^2e^t$$

x және y үшін теңдеулердің жалпы шешімдері келесідей:

$$x = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{-t} + \frac{t^2}{2}e^t$$

$$y = (C_4 + C_5t)e^t + C_6e^{-t} - t^2e^t$$

Алтаудың ішіндегі ерікті тұрақтылардың тәуелсіз саны $\Delta(D)$ көпмүшесінің дәрежесіне тең, яғни үшеуі. Олардың арасындағы тәуелділікті орнату үшін біз табылған шешімдерді бастапқы жүйеге қойып, тепе-теңдікті талап етеміз.Жүйенің бірінші теңдеуіне ауыстырғаннан кейін біз аламыз

$$(C_1 + C_2t + 2C_2)e^t + C_3e^{-t} + e^t + 2te^t + \frac{t^2}{2}e^t + 5(C_1 + C_2t + C_2)e^t - 5C_3e^{-t} + 5te^t + \frac{5}{2}t^2$$

$$e^t + 2(C_4 + C_5t + C_5)e^t - 2C_6e^{-t} - 4te^t - 2t^2e^t + 2(C_4 + C_5t)e^t + C_6e^{-t} - t^2e^t = 6e^t$$

Құрамында t^2e^t бар барлық мүшелер жойылады, бұл жасалған есептеуге қате енгізілмегенінің белгісі. e^t, te^t және e^{-t} функциялары сызықтық тәуелсіз болғандықтан, олардың алдындағы коэффициенттерді теңестіргеннен кейін біз үш теңдеу аламыз, оның ішінде C_4, C_5, C_6 тұрақтылары C_1, C_2, C_3 арқылы өрнектеледі

$$C_4 = -2C_1 - C_2 + \frac{2}{3};\ C_5 = -2C_2 - 1;\ C_6 = -4C_3$$

Бастапқы жүйенің жалпы шешімі төмендегідей

$$x = (C_1 + C_2t + \frac{t^2}{2})e^t + C_3e^{-t};$$

$$y = [-2C_1 - C_2 + \frac{2}{3} - (2C_2 + 1)t - t^2]e^t - 4C_3e^{-t}$$

Тұрақтылар арасындағы байланыстың үш теңдеуі сызықтық тәуелсіз болып шыққандықтан, x және y өрнектерін бастапқы жүйенің екінші теңдеуіне ауыстырудың қажеті жоқ екенін ескеріңіз, өйткені бос тұрақтылардың жалпы саны $\Delta(D)$ дәрежесіне тең болуы керек, яғни үшке. Сондықтан жүйенің екінші теңдеуінен алынған тұрақты C үшін үш жаңа теңдеу тұрақты C-ге жаңа байланыстар қоя алмайды және бастапқы жүйенің бірінші теңдеуінен бұрын алынған үш теңдеудің салдары болады.

ҚОРЫТЫНДЫ

Оқу бағдарламасында біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табуда анықталмаған коэффициенттер мен тұрақтыны вариациялау, Лагранж әдістері қарастырылады. Бұл әдістерге қарағанда Хевисайдтың операторлық әдісі біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімін табуда өте ұтымды әрі түсінікті және қысқа жол болады. Операторлық әдісті қолданудың мәні – дербес шешімді табуды алгебралық амалдарға және белгілі функцияларды интегралдауға келтіру. Дифференциалдық теңдеулерді шешудің Хевисайд әдісін көбінесе Лапластың интегралдық түрлендіруіне негізделген операциялық қисап әдісімен салыстырады. Операциялық қисапта дифференциалдық теңдеудің кескін теңдеуіне көшіп, оның шешімін тапқан соң түпнұсқа шешіміне көшу көптеген қиындықтар туғызады. Хевисайд әдісінде мұндай теңдеулерді шешу ұтымды жолмен жүргізіледі.

Дипломдық жобада біртекті, біртекті емес айнымалы коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге бірнеше есептер қарастырылды. Барлық есептерде дерлік дифференциалдық операторлар сызықты көбейткіштерге жіктеледі деп ұйғарылды. Демек Хевисайд әдісі техникалық мамандықтарда оқитын студенттер үшін таптырмайтын құрал болады.

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Розенблюм А.А. Интегрирование дифференциальных уравнений операторным методом: оқу құралы / ред. А.А. Розенблюм. – Горкий: Н.И. Лобачевский атындағы ҰҒМУ, 1980. – 59 б.

2 Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний: оқу құралы / ред. Н.Н.Ещенко. – Москва: Высшая школа баспасы, 1972. – Б. 25-41.

3 Сағындықов Б.Ж. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер және Mathlab: оқу құралы. /Б.Ж.Сағындықов. – Алматы: ҚазҰТЗУ, 2019. – 212 б.

4 Сағындықов Б.Ж. Математиканың арнайы тараулары: оқу құралы. /Б.Ж.Сағындықов. – Алматы: Лантар Трейд ЖШС , 2022. – 183 б.